(b) ¿Después de qué tiempo la cantidad de la inversión será de $7000?
(c) Si el interés se capitalizara continuamente en lugar de semestralmente, ¿cuánto tiempo tardaría la cantidad en crecer a $7000?

91. Una cuenta de mercado de dinero paga 5.2% de interés anual, capitalizado diariamente. Si se invierten $100,000 en esta cuenta, ¿cuánto tardará la cuenta en acumular $10,000 en intereses?

92. Un plan de ahorros para el retiro paga 4.5% de interés, capitalizado continuamente. ¿Cuánto tiempo tomará en duplicarse una inversión en este plan?

93-94 ■ Determine el porcentaje anual de ganancia (APY, por sus siglas en inglés) para la tasa de interés nominal anual y frecuencia compuesta dada

93. 4.25%; diariamente

94. 3.2%; mensualmente

95. La población de gatos callejeros de una pequeña ciudad crece exponencialmente. En 1999 la ciudad tenía 30 gatos callejeros y la tasa de crecimiento relativa era de 15% al año.
(a) Encuentre una función que modele la población $n(t)$ de gatos callejeros después de t años.
(b) Encuentre la población proyectada después de 4 años.
(c) Encuentre el número de años necesario para que la población de gatos callejeros llegue a 500.

96. Un cultivo contiene 10,000 bacterias inicialmente. Después de una hora, la cantidad de bacterias es de 25,000.
(a) Encuentre el período de duplicación.
(b) Encuentre el número de bacterias después de 3 horas.

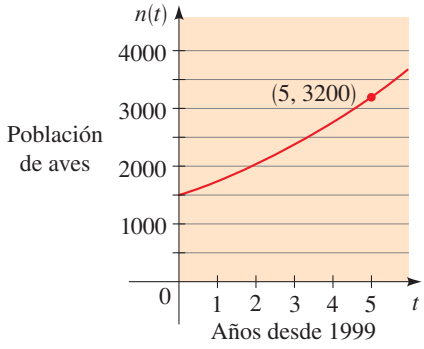
97. El uranio 234 tiene una vida media de 2.7×10^5 años.
(a) Encuentre la cantidad restante de una muestra de 10 mg después de mil años.
(b) ¿Cuánto tiempo tomará para que esta muestra se descomponga hasta que su masa sea de 7 mg?

98. Una muestra de bismuto 210 se desintegró a 33% de su masa original después de 8 días.
(a) Encuentre la vida media de este elemento.
(b) Encuentre la masa restante después de 12 días

99. La vida media del radio 226 es de 1590 años.
(a) Si una muestra tiene una masa de 150 mg, encuentre una función que modele la masa que resta después de t años.
(b) Encuentre la masa que habrá después de 1000 años.
(c) ¿Después de cuántos años habrá sólo 50 mg?

100. La vida media del paladio 100 es 4 días. Después de 20 días, una muestra se ha reducido a una masa de 0.375 g.
(a) ¿Cuál era la masa inicial de la muestra?
(b) Encuentre una función que modele la masa restante después de t días.
(c) ¿Cuál es la masa después de 3 días?
(d) Después de cuántos días habrá sólo 0.15 g?

101. La gráfica muestra la población de una rara especie de ave, donde t representa años desde 1999 y $n(t)$ se mide en miles.
(a) Encuentre una función que modele la población de aves en el tiempo t en la forma $n(t) = n_0 e^{rt}$.
(b) ¿Cuál se espera que sea la población de aves en el año 2010?



102. El motor de un auto funciona a una temperatura de 190ºF. Cuando el motor se apaga, se enfría de acuerdo con la Ley de Newton de Enfriamiento con una constante $k = 0.0341$, donde el tiempo se mide en minutos. Encuentre el tiempo necesario para que el motor se enfríe a 90ºF si la temperatura circundante es de 60ºF.

103. La concentración de iones de hidrógeno de claras de huevo fresco se midió como

$$[H^+] = 1.3 \times 10^{-8}\ \text{M}$$

Encuentre el pH y clasifique la sustancia como ácida o básica.

104. El pH del jugo de limón es 1.9. Encuentre la concentración de iones de hidrógeno.

105. Si un terremoto tiene magnitud de 6.5 en la escala de Richter, ¿cuál es la magnitud de otro terremoto que es 35 veces más intenso?

106. La operación de un martillo neumático se midió en 132 dB. El sonido de un susurro se midió en 28 dB. Encuentre la relación entre la intensidad del martillo y la del susurro.

1. Trace la gráfica de cada función y exprese su dominio, rango y asíntota. Demuestre que los puntos x y y intersectan la gráfica.

(a) $f(x) = 2^{-x} + 4$ **(b)** $g(x) = \log_3(x + 3)$

2. **(a)** Escriba la ecuación $6^{2x} = 25$ en forma logarítmica.

(b) Escriba la ecuación $\ln A = 3$ en forma exponencial.

3. Encuentre el valor exacto de cada expresión.

(a) $10^{\log 36}$ **(b)** $\ln e^3$

(c) $\log_3 \sqrt{27}$ **(d)** $\log_2 80 - \log_2 10$

(e) $\log_8 4$ **(f)** $\log_6 4 + \log_6 9$

4. Use las Leyes de Logaritmos para expandir la expresión:

$$\log \sqrt[3]{\frac{x + 2}{x^4(x^2 + 4)}}$$

5. Combine, en un solo logaritmo, lo siguiente: $\ln x - 2\ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2}\ln(3 - x^4)$

6. Encuentre la solución de la ecuación, aproximada a dos lugares decimales.

(a) $2^{x-1} = 10$ **(b)** $5\ln(3 - x) = 4$

(c) $10^{x+3} = 6^{2x}$ **(d)** $\log_2(x + 2) + \log_2(x - 1) = 2$

7. El tamaño inicial de un cultivo de bacteria es 1000. Después de una hora, la cantidad de bacterias es de 8000.

(a) Encuentre una función que modele la población después de t horas.

(b) Encuentre la población después de 1.5 horas.

(c) ¿Cuándo llegará la población a 15,000?

(d) Trace la gráfica de la función de población.

8. Suponga que se invierten \$12,000 en una cuenta de ahorros que paga 5.6% de interés al año.

(a) Escriba la fórmula para la cantidad en la cuenta después de t años si el interés se capitaliza mensualmente.

(b) Encuentre la cantidad en la cuenta después de 3 años si el interés se capitaliza diariamente.

(c) ¿Cuánto tiempo tomará para que la cantidad en la cuenta crezca a \$20,000 si el interés se capitaliza semestralmente?

9. La vida media del criptón 91 (^{91}Kr) es 10 segundos. En el tiempo $t = 0$ un recipiente de construcción robusta contiene 3 g de este gas radiactivo.

(a) Encuentre la función que modele la cantidad $A(t)$ de ^{91}Kr que queda en el recipiente después de t segundos.

(b) ¿Cuánto ^{91}Kr habrá después de un minuto?

(c) ¿Cuándo es que la cantidad de ^{91}Kr restante se reducirá a 1 μg (1 microgramo, o 10^{-6} g)?

10. Un terremoto de 6.4 en la escala de Richter golpeó las costas de Japón, causando grandes daños. Antes, ese mismo año, un terremoto de menor importancia que midió 3.1 en la escala de Richter se sintió en algunos lugares de Pennsylvania. ¿Cuántas veces más intenso fue el terremoto de Japón que el de Pennsylvania?

Ajuste de datos a curvas exponenciales y potencia

En una sección previa de *Enfoque sobre modelado*, página 296, aprendimos que la forma de una gráfica de dispersión nos ayuda a escoger el tipo de curva a usar para modelar datos. La primera gráfica de la Figura 1 sugiere una recta que pase por en medio de los puntos, y la segunda apunta a un polinomio cúbico. Para la tercera gráfica es tentador ajustar un polinomio de segundo grado. Pero, ¿qué pasa si una curva exponencial se ajusta mejor? ¿Cómo determinamos esto? En esta sección aprendemos a ajustar curvas exponenciales y de potencia a datos y a determinar qué tipo de curva se ajusta mejor a los datos. También aprendemos que para gráficas de dispersión como las de las últimas dos gráficas de la Figura 1, los datos pueden ser modelados por medio de funciones logarítmicas o logísticas.

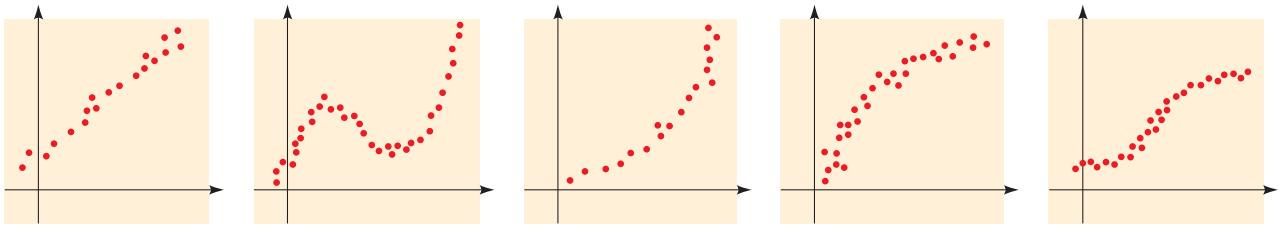


FIGURA 1

Modelado con funciones exponenciales

Si una gráfica de dispersión muestra que los datos aumentan rápidamente, podríamos modelar los datos usando un *modelo exponencial*, es decir, una función de la forma

$$f(x) = Ce^{kx}$$

donde C y k son constantes. En el primer ejemplo modelamos la población mundial mediante un modelo exponencial. Recuerde de la Sección 4.6 que la población tiende a aumentar exponencialmente.

TABLA 1
Población mundial

Año (t)	Población mundial (P en millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2520
1960	3020
1970	3700
1980	4450
1990	5300
2000	6060

EJEMPLO 1 | Un modelo exponencial para la población mundial

La Tabla 1 da la población del mundo en el siglo XX.

(a) Trace una gráfica de dispersión y observe que un modelo lineal no es apropiado.

(b) Encuentre una función exponencial que modele el crecimiento poblacional.

(c) Trace una gráfica de la función que encontró junto con la gráfica de dispersión. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(d) Use el modelo que usted encontró para predecir la población mundial en el año 2020.

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de dispersión se muestra en la Figura 2. Los puntos localizados no parecen encontrarse a lo largo de una recta, de modo que el modelo lineal no es apropiado.

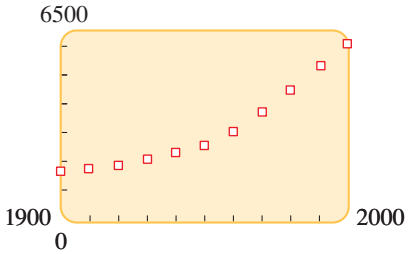


FIGURA 2 Gráfica de dispersión de la población mundial

© Chabruken/The Image Bank/Getty Images

La población del mundo aumenta exponencialmente.

(b) Usando una calculadora graficadora y el comando `ExpReg` (vea Figura 3(a)), obtenemos el modelo exponencial

$$P(t) = (0.0082543) \cdot (1.0137186)^t$$

Éste es un modelo de la forma $y = Cb^t$. Para convertir esto a la forma $y = Ce^{kt}$, usamos las propiedades de exponenciales y logaritmos como sigue:

$$\begin{aligned} 1.0137186^t &= e^{\ln 1.0137186^t} && A = e^{\ln A} \\ &= e^{t \ln 1.0137186} && \ln A^B = B \ln A \\ &= e^{0.013625t} && \ln 1.0137186 \approx 0.013625 \end{aligned}$$

Entonces, podemos escribir el modelo como

$$P(t) = 0.0082543e^{0.013625t}$$

(c) De la gráfica de la Figura 3(b) vemos que el modelo parece ajustarse muy bien a los datos. El período de crecimiento poblacional relativamente lento se explica con la depresión de la década de 1930 y las dos guerras mundiales.

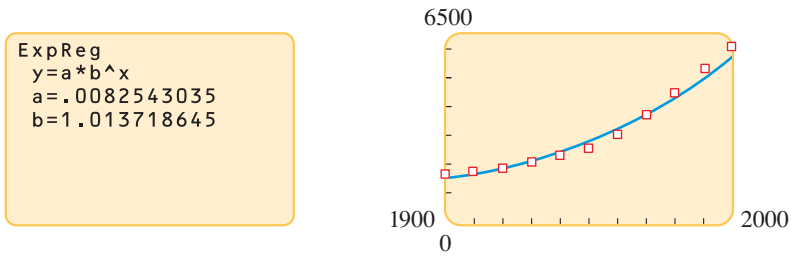


FIGURA 3 Modelo exponencial para la población mundial

(d) El modelo predice que la población mundial en 2020 será

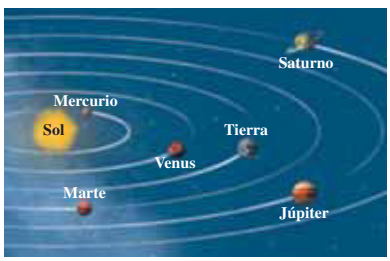
$$\begin{aligned} P(2020) &= 0.0082543e^{(0.013625)(2020)} \\ &\approx 7{,}405{,}400{,}000 \end{aligned}$$

Modelado con funciones potencia

Si la gráfica de dispersión de los datos que estamos estudiando se asemeja a la gráfica de $y = ax^2$, $y = ax^{1.32}$, o a alguna otra función potencia, entonces buscamos un *modelo potencia*, es decir, una función de la forma

$$f(x) = ax^n$$

donde a es una constante positiva y n es cualquier número real.



En el siguiente ejemplo buscamos un modelo potencia para algunos datos astronómicos. En astronomía, la distancia en el sistema solar se mide con frecuencia en unidades astronómicas. Una *unidad astronómica* (UA) es la distancia media de la Tierra al Sol. El *período* de un planeta es el tiempo que tarda el planeta en hacer una revolución completa alrededor del Sol (medido en años terrestres). En este ejemplo derivamos la relación sorprendente, descubierta primero por Johannes Kepler (vea página 754), entre la distancia media de un planeta desde el Sol y su período.

EJEMPLO 2 | Un modelo potencia para períodos planetarios

La Tabla 2 da la distancia media d de cada planeta desde el Sol en unidades astronómicas y su período T en años.

TABLA 2
Distancia y períodos de los planetas

Planeta	d	T
Mercurio	0.387	0.241
Venus	0.723	0.615
Tierra	1.000	1.000
Marte	1.523	1.881
Júpiter	5.203	11.861
Saturno	9.541	29.457
Urano	19.190	84.008
Neptuno	30.086	164.784
Plutón	39.507	248.350

(a) Trace una gráfica de dispersión. ¿Un modelo lineal es apropiado?

(b) Encuentre una función potencia que modele los datos.

(c) Trace una gráfica de la función que encontró y la gráfica de dispersión sobre la misma gráfica. ¿Qué tan bien se ajusta el modelo a los datos?

(d) Use el modelo que encontró para calcular el período de un asteroide cuya distancia media desde el Sol es 5 UA.

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de dispersión de la Figura 4 indica que los puntos localizados no se encuentran a lo largo de una recta, de modo que el modelo lineal no es apropiado.

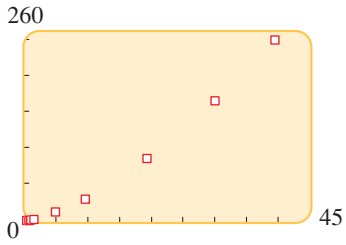


FIGURA 4 Gráfica de dispersión de datos planetarios

(b) Usando calculadora graficadora y el comando `PwrReg` (vea Figura 5(a)), obtenemos el modelo potencia

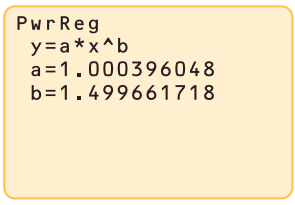
$$T = 1.000396d^{1.49966}$$

Si redondeamos ambos coeficientes y el exponente a tres cifras significativas, podemos escribir el modelo como

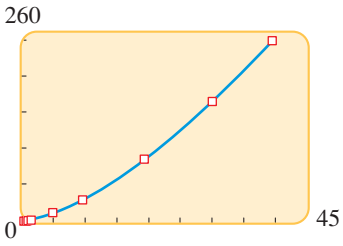
$$T = d^{1.5}$$

Ésta es la relación descubierta por Kepler (vea página 754). Sir Isaac Newton (página 852) usó posteriormente su Ley de Gravitación para derivar teóricamente esta relación, dando así una fuerte evidencia científica de que la Ley de Gravitación debe ser verdadera.

(c) La gráfica se muestra en la Figura 5(b). El modelo parece ajustar muy bien a los datos.



(a)



(b)

FIGURA 5 Modelo potencia para datos planetarios

(d) En este caso $d = 5$ UA, de modo que nuestro modelo da

$$T = 1.00039 \cdot 5^{1.49966} \approx 11.22$$

El período del asteroide es de unos 11.2 años. ■

Alineación de datos

Hemos utilizado la forma de una gráfica de dispersión para determinar qué tipo de modelo usar: lineal, exponencial o potencia. Esto funciona bien si los puntos de datos se encuentran sobre una recta, pero es difícil distinguir una gráfica de dispersión que sea exponencial de una que requiera un modelo potencia. Por lo tanto, para ayudar a determinar qué modelo usar, podemos *alinear* los datos, es decir, aplicar una función que "enderece" la gráfica de dispersión. La inversa de la función de alineación es entonces un modelo apro-

piado. A continuación describimos cómo alinear datos que puedan ser modelados por funciones exponenciales o potencia.

▶ Alineación de datos exponenciales

Si sospechamos que los puntos de datos (x, y) se encuentran sobre una curva exponencial $y = Ce^{kx}$, entonces los puntos

$$(x, \ln y)$$

deben estar sobre una recta. Podemos ver esto a partir de los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln Ce^{kx} && \text{Suponga que } y = Ce^{kx} \text{ y tome ln} \\ &= \ln e^{kx} + \ln C && \text{Propiedad de ln} \\ &= kx + \ln C && \text{Propiedad de ln} \end{aligned}$$

Para ver que $\ln y$ es una función lineal de x, sea $Y = \ln y$ y $A = \ln C$; entonces

$$Y = kx + A$$

Aplicamos esta técnica a los datos de población mundial (t, P) para obtener los puntos $(t, \ln P)$ en la Tabla 3. La gráfica de dispersión de $(t, \ln P)$ de la Figura 6, llamada **gráfica semi-log**, muestra que los datos alineados están aproximadamente sobre una recta, de modo que el modelo exponencial debe ser apropiado.

TABLA 3
Datos de la población mundial

t	Población P (en millones)	$\ln P$
1900	1650	21.224
1910	1750	21.283
1920	1860	21.344
1930	2070	21.451
1940	2300	21.556
1950	2520	21.648
1960	3020	21.829
1970	3700	22.032
1980	4450	22.216
1990	5300	22.391
2000	6060	22.525

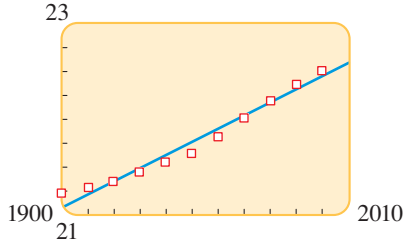


FIGURA 6 Gráfica semi-log de la Tabla 3

▶ Alineación de datos potencia

Si sospechamos que los puntos de datos (x, y) están sobre una curva potencia $y = ax^n$, entonces los puntos

$$(\ln x, \ln y)$$

deben estar sobre una recta. Podemos ver esto a partir de los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln ax^n && \text{Suponga que } y = ax^n \text{ y tome ln} \\ &= \ln a + \ln x^n && \text{Propiedad de ln} \\ &= \ln a + n \ln x && \text{Propiedad de ln} \end{aligned}$$

Para ver que $\ln y$ es una función lineal de $\ln x$, sea $Y = \ln y$, $X = \ln x$ y $A = \ln a$; entonces

$$Y = nX + A$$

Aplicamos esta técnica a los datos planetarios (d, T) en la Tabla 2 para obtener los puntos $(\ln d, \ln T)$ en la Tabla 4. La gráfica de dispersión $(\ln d, \ln T)$ en la Figura 7, llamada **gráfica log-log**, muestra que los datos se encuentran sobre una recta, de modo que el modelo potencia parece apropiado.

TABLA 4
Tabla log-log

$\ln d$	$\ln T$
−0.94933	−1.4230
−0.32435	−0.48613
0	0
0.42068	0.6318
1.6492	2.4733
2.2556	3.3829
2.9544	4.4309
3.4041	5.1046
3.6765	5.5148

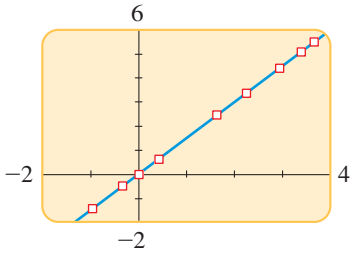


FIGURA 7 Gráfica log-log de datos en la Tabla 4

¿Modelo exponencial o potencia?

Suponga que una gráfica de dispersión de los puntos de datos (x, y) muestra un rápido aumento. ¿Debemos usar una función exponencial o una función potencia para modelar los datos? Para ayudarnos a determinarlo, trazamos dos gráficas de dispersión: una para los puntos $(x, \ln y)$ y la otra para los puntos $(\ln x, \ln y)$. Si la primera gráfica de dispersión parece encontrarse a lo largo de una recta, entonces es apropiado un modelo exponencial; si la segunda gráfica parece encontrarse a lo largo de una recta, entonces es apropiado un modelo de potencia.

EJEMPLO 3 | ¿Modelo exponencial o potencia?

TABLA 5

x	y
1	2
2	6
3	14
4	22
5	34
6	46
7	64
8	80
9	102
10	130

Los puntos de datos (x, y) se muestran en la Tabla 5.

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Trace gráficas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

(c) ¿Es apropiada una función exponencial o una función potencia para modelar esta información?

(d) Encuentre una función apropiada para modelar los datos.

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de dispersión de los datos se muestra en la Figura 8.

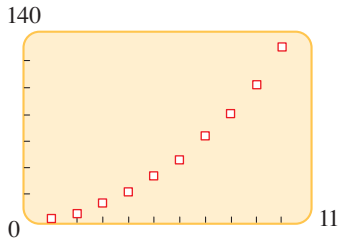


FIGURA 8

(b) Usamos los valores de la Tabla 6 para graficar las gráficas de dispersión en las Figuras 9 y 10.

TABLA 6

x	$\ln x$	$\ln y$
1	0	0.7
2	0.7	1.8
3	1.1	2.6
4	1.4	3.1
5	1.6	3.5
6	1.8	3.8
7	1.9	4.2
8	2.1	4.4
9	2.2	4.6
10	2.3	4.9

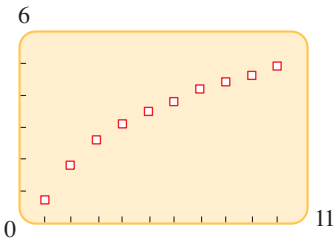


FIGURA 9 Gráfica semi-log

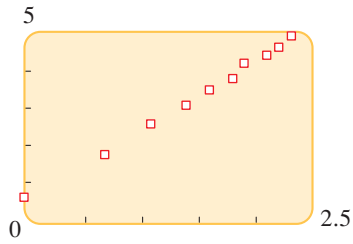


FIGURA 10 Gráfica log-log

(c) La gráfica de dispersión de $(x, \ln y)$ de la figura 9 no parece ser lineal, por lo que el modelo exponencial no es apropiado. Por otra parte, la gráfica de dispersión de $(\ln x, \ln y)$ de la Figura 10 es muy cercanamente lineal, de modo que un modelo potencia es apropiado.

(d) Usando el comando `PwrReg` en una calculadora graficadora, encontramos que la función potencia que mejor ajusta el punto de datos es

$$y = 1.85x^{1.82}$$

La gráfica de esta función y los puntos de datos originales se muestran en la Figura 11. ■

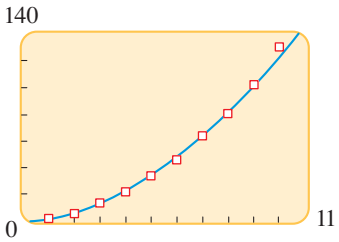


FIGURA 11

Antes que las calculadoras graficadoras y software de estadística se hicieran comunes, era frecuente que los modelos exponenciales y potencia para datos se construyeran al hallar primero un modelo lineal para los datos alineados. A continuación, se encontraba el modelo para los datos reales al tomar exponenciales. Por ejemplo, si encontramos que $\ln y = A \ln x + B$, entonces al tomar exponenciales obtenemos el modelo $y = e^B \cdot e^{A \ln x}$, o $y = Cx^A$ (donde $C = e^B$). Se usaba un papel de gráficas especial llamado "papel log" o "papel log-log" para facilitar este proceso.

Modelado con funciones logísticas

Un modelo logístico de crecimiento es una función de la forma

$$f(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}}$$

donde a, b y c son constantes positivas. Se usan funciones logísticas para modelar poblaciones donde el crecimiento está restringido por recursos disponibles. (Vea Ejercicios 25-28 de la Sección 4.2.)

EJEMPLO 4 | Abastecer de bagres un estanque

TABLA 7

Semana	Bagres
0	1000
15	1500
30	3300
45	4400
60	6100
75	6900
90	7100
105	7800
120	7900

Buena parte del pescado que se vende hoy en día en supermercados se cría en granjas piscícolas comerciales, no se pescan en estado silvestre. En un estanque en una de estas granjas se introducen inicialmente 1000 bagres, y la población de peces se muestrea entonces a intervalos de 15 semanas para estimar su tamaño. Los datos de la población se dan en la Tabla 7.

(a) Encuentre un modelo apropiado para los datos.

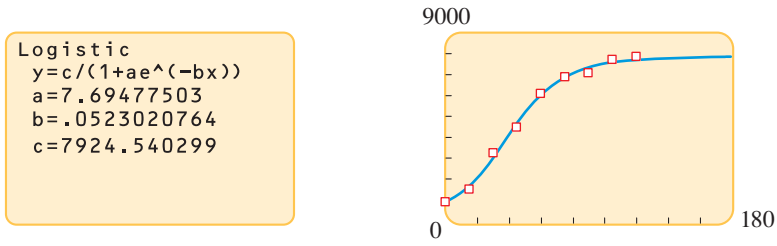
(b) Haga una gráfica de dispersión de los datos y grafique, en la gráfica de dispersión, el modelo que encontró en la parte (a).

(c) ¿Cómo predice el modelo que la población de peces cambiará con el tiempo?

SOLUCIÓN

(a) Como la población de bagres está restringida por su hábitat (el estanque), un modelo logístico es apropiado. Usando el comando `Logistic` en una calculadora (vea Figura 12(a)), encontramos el siguiente modelo para la población $P(t)$ de bagres:

$$P(t) = \frac{7925}{1 + 7.7e^{-0.052t}}$$



(a) (b) Población de bagres $y = P(t)$

FIGURA 12

(b) La gráfica de dispersión y la curva logística se muestran en la Figura 12(b).

(c) De la gráfica de P en la Figura 12(b), vemos que la población de bagres aumenta rápidamente hasta unas $t = 80$ semanas. A partir de ahí el crecimiento se reduce y, alrededor de $t = 120$ semanas, la población se nivela y queda más o menos constante en ligeramente más de 7900. ■

El comportamiento que es exhibido por la población de bagres en el Ejemplo 4 es típico de un crecimiento logístico. Después de una fase de crecimiento rápido, la población se aproxima a un nivel constante llamado **capacidad de sostenimiento** (o **de carga**) del entorno. Esto ocurre porque cuando $t \to \infty$ tenemos $e^{-bt} \to 0$ (vea Sección 4.2), y entonces

$$P(t) = \frac{c}{1 + ae^{-bt}} \longrightarrow \frac{c}{1 + 0} = c$$

Por lo tanto, la capacidad de sostenimiento es c.

PROBLEMAS

1. Población de Estados Unidos La constitución de Estados Unidos exige un censo cada 10 años. Los datos del censo para 1790-2000 se dan en la tabla siguiente.

(a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

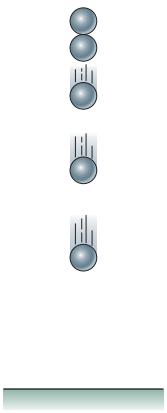
(b) Use calculadora para hallar un modelo exponencial para los datos.

(c) Use su modelo para predecir la población en el censo de 2010.

(d) Use su modelo para estimar la población en 1965.

(e) Compare sus respuestas de las partes (c) y (d) contra los valores de la tabla. ¿Piensa usted que un modelo exponencial es apropiado para estos datos?

Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)	Año	Población (en millones)
1790	3.9	1870	38.6	1950	151.3
1800	5.3	1880	50.2	1960	179.3
1810	7.2	1890	63.0	1970	203.3
1820	9.6	1900	76.2	1980	226.5
1830	12.9	1910	92.2	1990	248.7
1840	17.1	1920	106.0	2000	281.4
1850	23.2	1930	123.2		
1860	31.4	1940	132.2		



2. Una pelota en caída En un experimento de física se deja caer una pelota desde una altura de 5 metros. Los estudiantes registran la distancia que cae la pelota a cada décimo de segundo. (Esto puede hacerse usando una cámara y una luz estroboscópica.)

Tiempo (s)	Distancia (m)
0.1	0.048
0.2	0.197
0.3	0.441
0.4	0.882
0.5	1.227
0.6	1.765
0.7	2.401
0.8	3.136
0.9	3.969
1.0	4.902

(a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Use calculadora para hallar un modelo potencia.

(c) Use su modelo para predecir la distancia que caerá la pelota en 3 segundos

3. Gastos en salud Los gastos en salud en Estados Unidos para los años 1970-2001 se dan en la tabla siguiente, y una gráfica de dispersión de los datos se muestra en la figura.

(a) ¿La gráfica de dispersión mostrada sugiere un modelo exponencial?

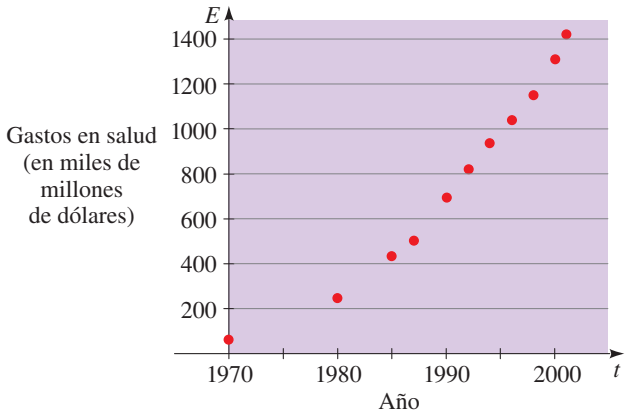
(b) Haga una tabla de valores $(t, \ln E)$ en una gráfica de dispersión. ¿La gráfica de dispersión parece ser lineal?

(c) Encuentre una recta de regresión para los datos de la parte (b).

(d) Use los resultados de la parte (c) para hallar un modelo exponencial para el crecimiento de gastos en salud.

(e) Use su modelo para predecir los gastos totales en salud en 2009.

Año	Gastos en salud (en miles de millones de dólares)
1970	74.3
1980	251.1
1985	434.5
1987	506.2
1990	696.6
1992	820.3
1994	937.2
1996	1039.4
1998	1150.0
2000	1310.0
2001	1424.5



Tiempo (h)	Cantidad de ^{131}I (g)
0	4.80
8	4.66
16	4.51
24	4.39
32	4.29
40	4.14
48	4.04

4. Vida media del yodo radiactivo Un estudiante está tratando de determinar la vida media del yodo radiactivo 131. Él mide la cantidad de yodo 131 en una solución de muestra cada 8 horas. Sus datos se ilustran en la tabla del margen.

(a) Haga una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Use calculadora para hallar un modelo exponencial.

(c) Use su modelo para hallar la vida media del yodo 131.

5. Ley de Beer-Lambert Cuando pasa luz solar por las aguas de lagos y océanos, la luz es absorbida y, cuanto mayor sea la profundidad a la que penetre, más disminuye su intensidad. La intensidad I de luz a una profundidad x está dada por la Ley Beer-Lambert:

$$I = I_0 e^{-kx}$$

donde I_0 es la intensidad de luz en la superficie y k es una constante que depende de la oscuridad del agua (vea página 336). Un biólogo usa un fotómetro para investigar la penetración de luz en un lago del norte, obteniendo los datos de la tabla.

(a) Use una calculadora graficadora para hallar una función exponencial de la forma dada por la Ley de Beer-Lambert para modelar estos datos. ¿Cuál es la intensidad de luz I_0 en la superficie en este día, y cuál es la constante k de "oscuridad" para este lago? [*Sugerencia*: Si su calculadora da una función de la forma $I = ab^x$, convierta esto a la forma que desee usando las identidades $b^x = e^{\ln(b^x)} = e^{x \ln b}$. Vea Ejemplo 1(b).]

(b) Haga una gráfica de dispersión de los datos y grafique la función que encontró en la parte (a) en su gráfica de dispersión.

(c) Si la intensidad de luz desciende por debajo de 0.15 lumen (lm), cierta especie de algas no puede sobrevivir porque la fotosíntesis es imposible. Use su modelo de la parte (a) para determinar la profundidad a la cual hay insuficiente luz para sostener estas algas.

La intensidad de luz disminuye exponencialmente con la profundidad.

Profundidad (pies)	Intensidad de luz (lm)	Profundidad (pies)	Intensidad de luz (lm)
5	13.0	25	1.8
10	7.6	30	1.1
15	4.5	35	0.5
20	2.7	40	0.3

6. Experimentos con curvas "de olvido" Todos estamos familiarizados con el fenómeno de olvidar algo. Datos que con claridad entendimos en el momento en que los aprendimos primero a veces se desvanecen de la memoria cuando hacemos un examen final. Unos psicólogos han propuesto varias formas de modelar este proceso. Uno de estos modelos es la Ley de Ebbinghaus de Olvido, que se describe en la página 327. Otros modelos usan funciones exponenciales o logarítmicas. Para crear su propio modelo, una psicóloga realiza un experimento en un grupo de voluntarios a quien pide memorizar una lista de 100 palabras relacionadas. A continuación, ella prueba cuántas de estas palabras pueden recordar después de varios períodos. Los resultados promedio para el grupo se muestran en la tabla siguiente.

(a) Use calculadora graficadora para hallar una función de *potencia,* de la forma $y = at^b$, que modele el número promedio de palabras y que los voluntarios recuerdan después de t horas. A continuación, encuentre una función *exponencial* de la forma $y = ab^t$ para modelar los datos.

(b) Haga una gráfica de dispersión de los datos y grafique las dos funciones que encontró en la parte (a) en su gráfica de dispersión.

(c) ¿Cuál de las dos funciones parece dar el mejor modelo?

Tiempo	Palabras recordadas
15 min	64.3
1 h	45.1
8 h	37.3
1 día	32.8
2 días	26.9
3 días	25.6
5 días	22.9

© Arena Creative. Utilizada bajo licencia de Shutterstock.com

El número de especies diferentes de murciélagos en una cueva está relacionado con el tamaño de la cueva por una función de potencia.

7. Modelar una relación entre especies y área La tabla siguiente da las áreas de varias cuevas de la región central de México, y el número de especies de murciélagos que viven en cada cueva.*

(a) Encuentre una función potencia que modele los datos.

(b) Trace una gráfica de la función que encontró en la parte (a) y una gráfica de dispersión de los datos en la misma gráfica. ¿El modelo se ajusta bien a los datos?

(c) La cueva llamada El Sapo cerca de Puebla, México, tiene una superficie $A = 205$ m^2. Use el modelo para estimar el número de especies de murciélagos que esperaría encontrar en esa cueva.

Cueva	Área (m^2)	Número de especies
La Escondida	18	1
El Escorpión	19	1
El Tigre	58	1
Misión Imposible	60	2
San Martín	128	5
El Arenal	187	4
La Ciudad	344	6
Virgen	511	7

8. Emisiones de escapes de autos Un estudio realizado por la U.S. Office of Science and Technology en 1972 estimó el costo de reducir emisiones de automóviles en ciertos porcentajes. Encuentre un modelo exponencial que capte la tendencia de "rendimientos de reducción" de estos datos mostrados en la tabla siguiente.

Reducción en emisiones (%)	Costo por auto ($)
50	45
55	55
60	62
65	70
70	80
75	90
80	100
85	200
90	375
95	600

9. ¿Modelo exponencial o potencia? En la tabla siguiente se muestran los puntos de datos (x, y).

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Trace gráficas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

(c) ¿Qué es más apropiado para modelar estos datos: una función exponencial o una función potencia?

(d) Encuentre una función apropiada para modelar los datos.

x	y
2	0.08
4	0.12
6	0.18
8	0.25
10	0.36
12	0.52
14	0.73
16	1.06

* A. K. Brunet y R. A. Medallin, "The Species-Area Relationship in Bat Assemblages of Tropical Caves." *Journal of Mammalogy*, *82*(4):1114-1122, 2001.

x	y
10	29
20	82
30	151
40	235
50	330
60	430
70	546
80	669
90	797

10. ¿Modelo exponencial o potencia? Los puntos de datos (x, y) se muestran en la tabla del margen.

(a) Trace una gráfica de dispersión de los datos.

(b) Trace gráficas de dispersión de $(x, \ln y)$ y $(\ln x, \ln y)$.

(c) ¿Qué es más apropiado para modelar estos datos: una función exponencial o una función potencia?

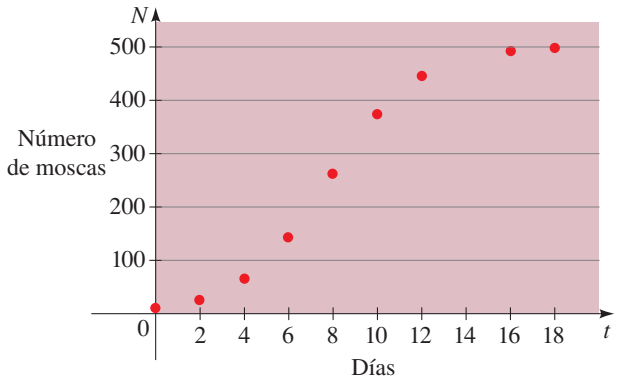
(d) Encuentre una función apropiada para modelar los datos.

11. Crecimiento logístico de la población La tabla y gráfica de dispersión dan la población de moscas negras en un recipiente cerrado de laboratorio, en un período de 18 días.

(a) Use el comando `Logistic` de su calculadora para hallar un modelo logístico para estos datos.

(b) Use el modelo para estimar el tiempo cuando hubo 400 moscas en el recipiente.

Tiempo (días)	Número de moscas
0	10
2	25
4	66
6	144
8	262
10	374
12	446
16	492
18	498



12. Modelos logarítmicos Un **modelo logarítmico** es una función de la forma

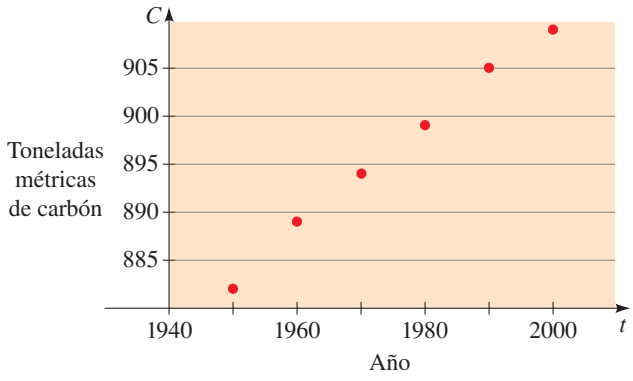
$$y = a + b \ln x$$

Numerosas relaciones entre variables en el mundo real pueden ser modeladas por este tipo de función. La tabla y gráfica de dispersión siguientes muestran la producción de carbón (en toneladas métricas) de una pequeña mina en el norte de la Columbia Británica.

(a) Use el comando `LnReg` de su calculadora para hallar un modelo logarítmico para estas cifras de producción.

(b) Use el modelo para predecir la producción de carbón extraído de esta mina en 2010.

Año	Toneladas métricas de carbón
1950	882
1960	889
1970	894
1980	899
1990	905
2000	909



1. Sea $f(x) = x^2 - 4x$ y $g(x) = \sqrt{x + 4}$. Encuentre lo siguiente:

(a) El dominio de f

(b) El dominio de g

(c) $f(-2), f(0), f(4), g(0), g(8), g(-6)$

(d) $f(x + 2), g(x + 2), f(2 + h)$

(e) El promedio de rapidez de cambio de g entre $x = 5$ y $x = 21$

(f) $f \circ g, g \circ f, f(g(12)), g(f(12))$

(g) La inversa de g

2. Sea $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \le 2 \\ x - 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

(a) Evalúe $f(0), f(1), f(2), f(3)$ y $f(4)$.

(b) Trace la gráfica de f.

3. Sea f la función cuadrática $f(x) = -2x^2 + 8x + 5$.

(a) Exprese f en forma estándar.

(b) Encuentre el valor máximo o mínimo de f.

(c) Trace la gráfica de f.

(d) Encuentre el intervalo en el que f es creciente y el intervalo en el que f es decreciente.

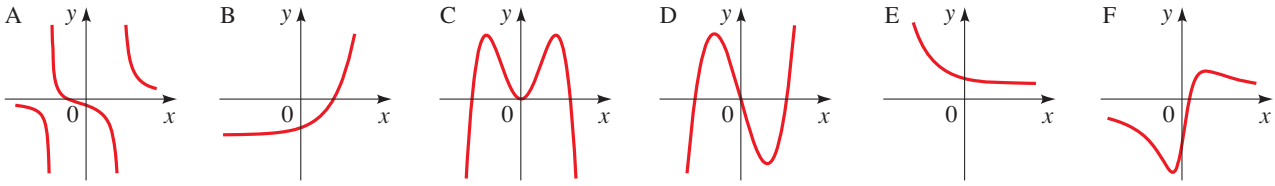
(e) ¿Cómo se obtiene la gráfica de $g(x) = -2x^2 + 8x + 10$ a partir de la gráfica de f?

(f) ¿Cómo se obtiene la gráfica de $h(x) = -2(x + 3)^2 + 8(x + 3) + 5$ a partir de la gráfica de f?

4. Sin usar calculadora graficadora, relacione cada una de las siguientes funciones con las gráficas que aparecen a continuación. Dé razones para sus elecciones.

$$f(x) = x^3 - 8x \qquad g(x) = -x^4 + 8x^2 \qquad r(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 9}$$

$$s(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 9} \qquad h(x) = 2^x - 5 \qquad k(x) = 2^{-x} + 3$$



5. Sea $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 10x + 8$.

(a) Haga una lista de todos los posibles ceros racionales de P.

(b) Determine cuáles de los números que citó usted en la parte (a) en realidad son ceros de P.

(c) Factorice P completamente.

(d) Trace una gráfica de P.

6. Sea $Q(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 + x^2 - 4x + 2$

(a) Encuentre todos los ceros de Q, reales y complejos, y exprese sus multiplicidades.

(b) Factorice Q completamente.

(c) Factorice Q en factores cuadráticos lineales e irreductibles.

7. Sea $r(x) = \dfrac{3x^2 + 6x}{x^2 - x - 2}$. Encuentre los puntos de intersección x y y y las asíntotas horizontales y verticales. A continuación, trace la gráfica de r.

8. Trace gráficas de las siguientes funciones en el mismo plano de coordenadas.

(a) $f(x) = 2 - e^x$ **(b)** $g(x) = \ln(x + 1)$

9. **(a)** Encuentre el valor exacto de $\log_3 16 - 2 \log_3 36$.

(b) Use las Leyes de Logaritmos para expandir la expresión

$$\log\left(\frac{x^5\sqrt{x-1}}{2x-3}\right)$$

10. Resuelva las ecuaciones.

(a) $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$

(b) $2e^{3x} - 11e^{2x} + 10e^x + 8 = 0$ [*Sugerencia:* Compare con el polinomio del Problema 5.]

11. Una suma de $25,000 se deposita en una cuenta que paga 5.4% de interés al año, capitalizado diariamente.

(a) ¿Cuál será la cantidad en la cuenta después de 3 años?

(b) ¿Cuándo habrá crecido la cuenta a $35,000?

(c) ¿Cuánto tiempo tomará el depósito inicial en duplicarse?

12. Después de un naufragio, 129 ratas se las arreglan para nadar desde el naufragio a una isla desierta. La población de ratas en la isla crece exponencialmente, y después de 15 meses hay 280 ratas en la isla.

(a) Encuentre una función que modele la población t meses después de la llegada de las ratas.

(b) ¿Cuál será la población 3 años después del naufragio?

(c) ¿Cuándo llegará la población a ser de 2000?

© Kristian Peetz.
Usada bajo licencia de Shutterstock.com

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS: MÉTODO DE LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

5.1 La circunferencia unitaria

5.2 Funciones trigonométricas de números reales

5.3 Gráficas trigonométricas

5.4 Más gráficas trigonométricas

5.5 Funciones trigonométricas inversas y sus gráficas

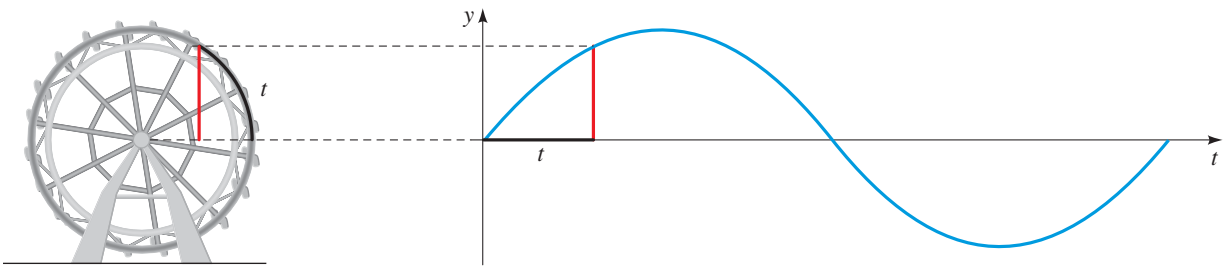
5.6 Modelado de movimiento armónico

ENFOQUE SOBRE MODELADO

Ajuste de datos a curvas senoidales

Si el lector ha subido a una rueda "de la fortuna" sabe de movimiento periódico, es decir, movimiento que se repite una y otra vez. El movimiento periódico es común en la naturaleza. Considere el diario amanecer y puesta de Sol (día, noche, día, noche, …), la variación diaria de los niveles de mareas (alta, baja, alta, baja, …), o las vibraciones de una hoja en el viento (izquierda, derecha, izquierda, derecha, …). Para modelar tal movimiento necesitamos una función cuyos valores aumentan, después disminuyen, luego aumentan otra vez, y así sucesivamente. Para entender cómo definir tal función, veamos a una persona que disfruta de un paseo en una "rueda de la fortuna". La gráfica muestra la altura a la que se encuentra la persona sobre el centro de la rueda en el tiempo t. Observe que la gráfica sube y baja repetidamente.

La función trigonométrica *seno* se define en una forma similar, usando la circunferencia unitaria (en lugar de "rueda de la fortuna"). Las funciones trigonométricas se pueden definir en dos formas diferentes pero equivalentes: como funciones de números reales (Capítulo 5) o como funciones de ángulos (Capítulo 6). Los dos métodos son independientes entre sí, de modo que ya sea el Capítulo 5 o el Capítulo 6 se pueden estudiar primero. Estudiamos ambos métodos porque se requiere de diferentes métodos para aplicaciones diferentes.



5.1 LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

La circunferencia unitaria ▶ Puntos terminales en la circunferencia unitaria ▶ El número de referencia

En esta sección exploramos algunas propiedades de la circunferencia de radio 1 con centro en el origen. Estas propiedades se usan en la siguiente sección para definir las funciones trigonométricas.

La circunferencia unitaria

El conjunto de puntos a una distancia 1 del origen es una circunferencia de radio 1 (vea Figura 1). En la Sección 1.8 aprendimos que la ecuación de esta circunferencia es $x^2 + y^2 = 1$.

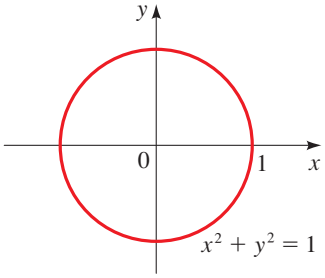


FIGURA 1 La circunferencia unitaria

LA CIRCUNFERENCIA UNITARIA

La **circunferencia unitaria** es de radio 1 con centro en el origen en el plano xy. Su ecuación es

$$x^2 + y^2 = 1$$

EJEMPLO 1 | Un punto en la circunferencia unitaria

Demuestre que el punto $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ está en la circunferencia unitaria.

SOLUCIÓN Necesitamos demostrar que este punto satisface la ecuación de la circunferencia unitaria, es decir, $x^2 + y^2 = 1$. Como

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{3}{9} + \frac{6}{9} = 1$$

P está en la circunferencia unitaria.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **3**

EJEMPLO 2 | Localizar un punto sobre la circunferencia unitaria

El punto $P(\sqrt{3}/2, y)$ está en la circunferencia unitaria en el cuarto cuadrante. Encuentre su coordenada y.

SOLUCIÓN Como el punto está en la circunferencia unitaria, tenemos

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}$$

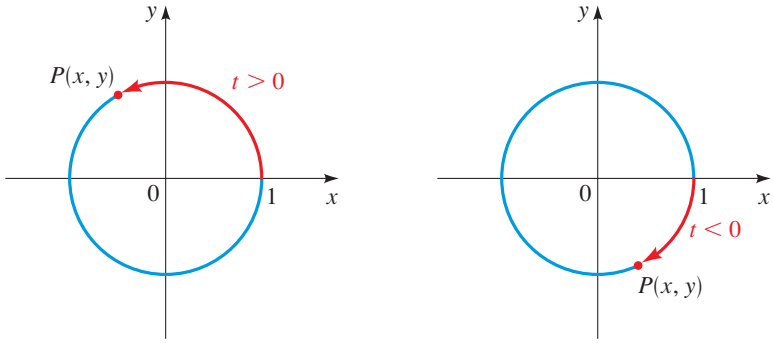
Como el punto está en el cuarto cuadrante, su coordenada y debe ser negativa, de modo que $y = -\frac{1}{2}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **9**

Puntos terminales en la circunferencia unitaria

Suponga que t es un número real. Marquemos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto $(1, 0)$ y moviéndonos en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj si t es positiva y en el sentido de las manecillas si t es negativa (Figura 2).

En esta forma llegamos al punto $P(x, y)$ en la circunferencia. El punto $P(x, y)$ obtenido en esta forma se llama **punto terminal** determinado por el número real t.



(a) Punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t > 0$

(b) Punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t < 0$

FIGURA 2

La circunferencia unitaria es $C = 2\pi(1) = 2\pi$. Entonces, si un punto inicia en $(1, 0)$ y se mueve en sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj en toda la vuelta del círculo unitario y regresa a $(1, 0)$, viaja una distancia de 2π. Para moverse la mitad alrededor del círculo, viaja una distancia de $\frac{1}{2}(2\pi) = \pi$. Para moverse un cuarto de la distancia alrededor del círculo, viaja una distancia de $\frac{1}{4}(2\pi) = \pi/2$. ¿Dónde termina el punto cuando viaja estas distancias a lo largo del círculo? De la Figura 3 vemos, por ejemplo, que cuando viaja una distancia de π iniciando en $(1, 0)$, su punto terminal es $(-1, 0)$.

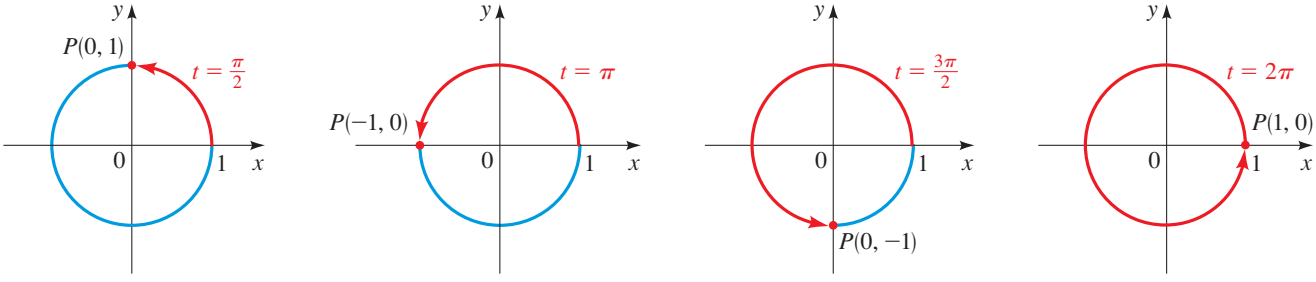


FIGURA 3 Puntos terminales determinados por $t = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ y 2π.

EJEMPLO 3 | Hallar puntos terminales

Encuentre el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por cada número real t.

(a) $t = 3\pi$ **(b)** $t = -\pi$ **(c)** $t = -\dfrac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN De la Figura 4 obtenemos lo siguiente:

(a) El punto terminal determinado por 3π es $(-1, 0)$.

(b) El punto terminal determinado por $-\pi$ es $(-1, 0)$.

(c) El punto terminal determinado por $-\pi/2$ es $(0, -1)$.

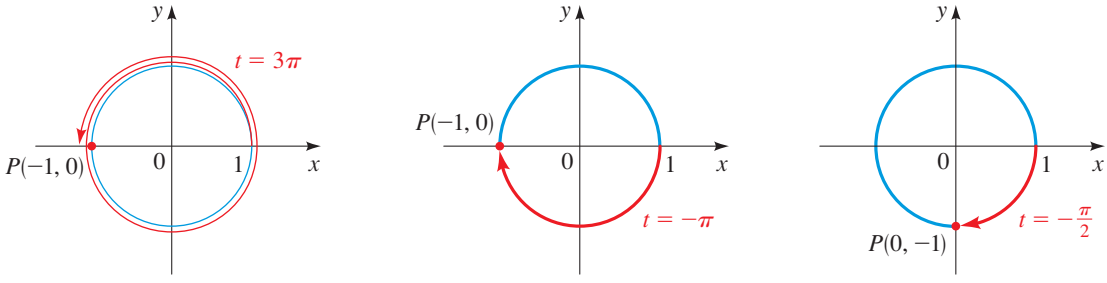


FIGURA 4

Observe que diferentes valores de t pueden determinar el mismo punto terminal.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

El punto terminal $P(x, y)$ determinado por $t = \pi/4$ es la misma distancia de $(1, 0)$ que $(0, 1)$ a lo largo de la circunferencia unitaria (vea Figura 5).

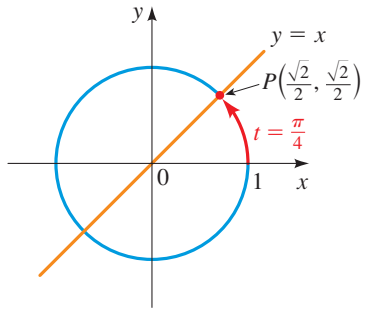


FIGURA 5

Como la circunferencia unitaria es simétrica con respecto a la recta $y = x$, se deduce que P se encuentra sobre la recta $y = x$. Por lo tanto, P es el punto de intersección (en el primer cuadrante) de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $y = x$. Sustituyendo x por y en la ecuación de la circunferencia, obtenemos

$$x^2 + x^2 = 1$$

$$2x^2 = 1 \qquad \text{Combine términos semejantes}$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \qquad \text{Divida entre 2}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como P está en el primer cuadrante, $x = 1/\sqrt{2}$ y como $y = x$, tenemos $y = 1/\sqrt{2}$ también. Entonces, el punto terminal determinado por $\pi/4$ es

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Se pueden usar métodos similares para hallar los puntos terminales determinados por $t = \pi/6$ y $t = \pi/3$ (vea Ejercicios 57 y 58). La Tabla 1 y la Figura 6 dan los puntos terminales para algunos valores especiales de t.

TABLA 1

t	Punto terminal determinado por t
0	$(1,0)$
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$

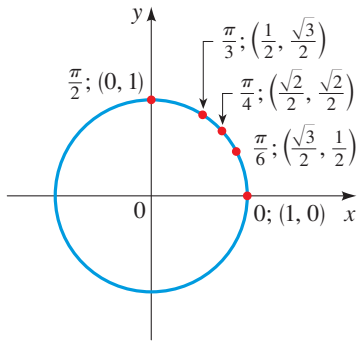


FIGURA 6

EJEMPLO 4 | Hallar puntos terminales

Encuentre el punto terminal determinado por cada número real t dado.

(a) $t = -\frac{\pi}{4}$ **(b)** $t = \frac{3\pi}{4}$ **(c)** $t = -\frac{5\pi}{6}$

SOLUCIÓN

(a) Sea P el punto terminal determinado por $-\pi/4$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la Figura 7(a) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en y. Como P está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Entonces, el punto terminal es $P(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

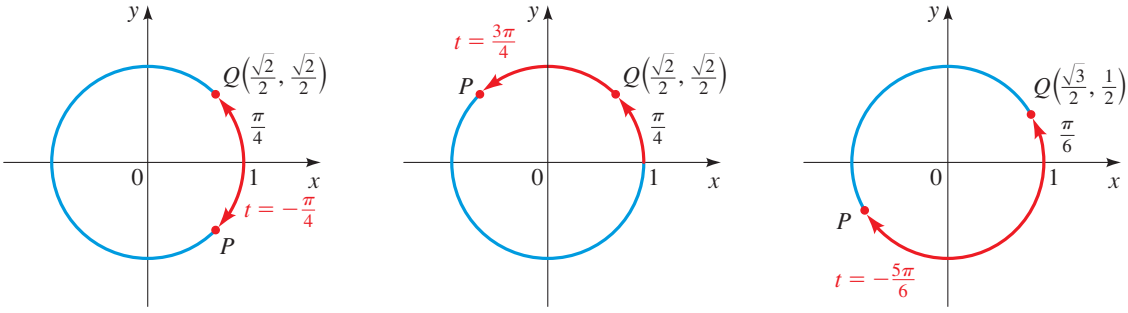


FIGURA 7

(b) Sea P el punto terminal determinado por $3\pi/4$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/4$. De la Figura 7(b) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo de la coordenada en x. Como P está en el segundo cuadrante, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Entonces, el punto terminal es $P(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

(c) Sea P el punto terminal determinado por $-5\pi/6$, y sea Q el punto terminal determinado por $\pi/6$. De la Figura 7(c) vemos que el punto P tiene las mismas coordenadas que Q excepto por el signo. Como P está en el tercer cuadrante, sus coordenadas son ambas negativas. Entonces, el punto terminal es $P(-\sqrt{3}/2, -\frac{1}{2})$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25**

El número de referencia

De los Ejemplos 3 y 4 vemos que para hallar un punto terminal en cualquier cuadrante sólo necesitamos saber el punto terminal "correspondiente" en el primer cuadrante. Usamos la idea del *número de referencia* para ayudarnos a hallar puntos terminales.

NÚMERO DE REFERENCIA

Sea t un número real. El **número de referencia** $\bar{t}$ asociado con t es la distancia más corta a lo largo de la circunferencia unitaria entre el punto terminal determinado por t y el eje x.

La Figura 8 muestra que para hallar el número de referencia $\bar{t}$, es útil saber el cuadrante en el que se encuentre el punto terminal determinado por t. Si el punto terminal se encuentra en el primero o cuarto cuadrante, donde x es positiva, encontramos $\bar{t}$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje x *positivo*. Si se encuentra en los cuadrantes segundo o tercero, donde x es negativa, encontramos $\bar{t}$ al movernos a lo largo de la circunferencia al eje x *negativo*.

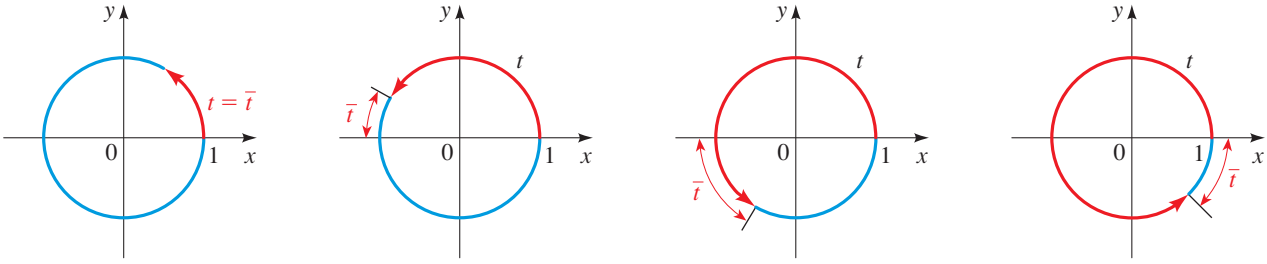


FIGURA 8 El número de referencia $\bar{t}$ por t.

EJEMPLO 5 | Hallar números de referencia

Encuentre el número de referencia para cada valor de t.

(a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{4}$ **(c)** $t = -\dfrac{2\pi}{3}$ **(d)** $t = 5.80$

SOLUCIÓN De la Figura 9 encontramos los números de referencia como sigue:

(a) $\bar{t} = \pi - \dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$

(b) $\bar{t} = 2\pi - \dfrac{7\pi}{4} = \dfrac{\pi}{4}$

(c) $\bar{t} = \pi - \dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}$

(d) $\bar{t} = 2\pi - 5.80 \approx 0.48$

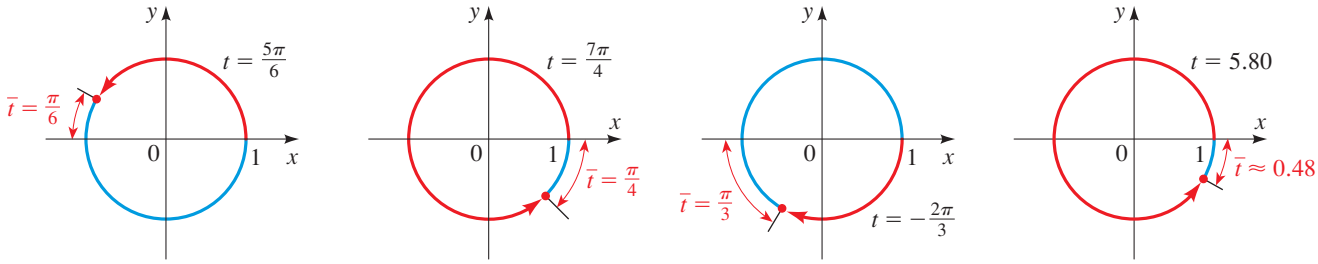


FIGURA 9

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

USO DE NÚMEROS DE REFERENCIA PARA HALLAR PUNTOS TERMINALES

Para hallar el punto terminal P determinado por cualquier valor de t, usamos los pasos siguientes:

1. Encuentre el número de referencia $\bar{t}$.
2. Encuentre el punto terminal $Q(a, b)$ determinado por $\bar{t}$.
3. El punto terminal determinado por t es $P(\pm a, \pm b)$, donde los signos se escogen de acuerdo con el cuadrante en el que se encuentre este punto terminal.

EJEMPLO 6 | Uso de números de referencia para hallar puntos terminales

Encuentre el punto terminal determinado por cada número real t dado.

(a) $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{4}$ **(c)** $t = -\dfrac{2\pi}{3}$

SOLUCIÓN Los números de referencia asociados con estos valores de t se hallaron en el Ejemplo 5.

(a) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/6$, que determina el punto terminal $\left(\sqrt{3}/2, \frac{1}{2}\right)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal determinado por t está en el segundo cuadrante, su coordenada x es negativa y su coordenada y es positiva. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

(b) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/4$, que determina el punto terminal $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal está en el cuarto cuadrante, su coordenada x es positiva y su coordenada y es negativa. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

(c) El número de referencia es $\bar{t} = \pi/3$, que determina el punto terminal $(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2)$ de la Tabla 1. Como el punto terminal está determinado por t en el tercer cuadrante, sus coordenadas son ambas negativas. Entonces, el punto terminal deseado es

$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **39**

Como el perímetro de la circunferencia unitaria es 2π, el punto terminal determinado por t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$ o $t - 2\pi$. En general, podemos sumar o restar 2π cualquier número de veces sin cambiar el punto terminal determinado por t. Usamos esta observación en el siguiente ejemplo para hallar puntos terminales para t grandes.

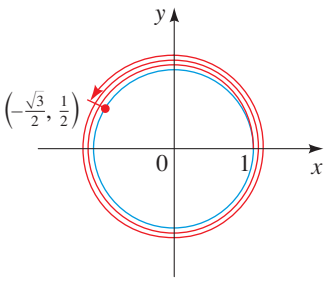


FIGURA 10

EJEMPLO 7 | Hallar el punto terminal para t grande

Encuentre el punto terminal determinado por $t = \dfrac{29\pi}{6}$.

SOLUCIÓN Como

$$t = \frac{29\pi}{6} = 4\pi + \frac{5\pi}{6}$$

vemos que el punto terminal de t es el mismo que el de $5\pi/6$ (esto es, restamos 4π). Por lo tanto, por el Ejemplo 6(a) el punto terminal es $(-\sqrt{3}/2, \frac{1}{2})$. (Vea Figura 10.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **45**

5.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. **(a)** La circunferencia unitaria es la circunferencia con centro en ____ con radio ____.

(b) La ecuación de la circunferencia unitaria es _____.

(c) Suponga que el punto $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria. Encuentre la coordenada faltante:

(i) $P(1, \quad)$ (ii) $P(\quad, 1)$

(iii) $P(-1, \quad)$ (iv) $P(\quad, -1)$

2. **(a)** Si marcamos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en $(1, 0)$ y moviéndonos en dirección contraria al giro de las manecillas de un reloj, llegamos al punto _____ determinado por t.

(b) Los puntos terminales determinados por $\pi/2$, π, $-\pi/2$, 2π son _____, _____, _____, y _____, respectivamente.

HABILIDADES

3-8 ■ Demuestre que el punto está en la circunferencia unitaria.

3. $\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ **4.** $\left(-\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right)$ **5.** $\left(\frac{7}{25}, \frac{24}{25}\right)$

6. $\left(-\frac{5}{7}, -\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$ **7.** $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{2}{3}\right)$ **8.** $\left(\frac{\sqrt{11}}{6}, \frac{5}{6}\right)$

9-14 ■ Encuentre la coordenada faltante de P, usando el hecho de que P se encuentra en la circunferencia unitaria en el cuadrante dado.

Coordenadas	Cuadrante
9. $P(-\frac{3}{5}, \quad)$	III
10. $P(\quad, -\frac{7}{25})$	IV
11. $P(\quad, \frac{1}{3})$	II

Coordenadas	Cuadrante
12. $P(\frac{2}{5}, \quad)$	I
13. $P(\quad, -\frac{2}{7})$	IV
14. $P(-\frac{2}{3}, \quad)$	II

15-20 ■ El punto P está en la circunferencia unitaria. Encuentre $P(x, y)$ a partir de la información dada.

15. La coordenada x de P es $\frac{4}{5}$, y la coordenada y es positiva.

16. La coordenada y de P es $-\frac{1}{3}$, y la coordenada x es positiva.

17. La coordenada y de P es $\frac{2}{3}$, y la coordenada x es negativa.

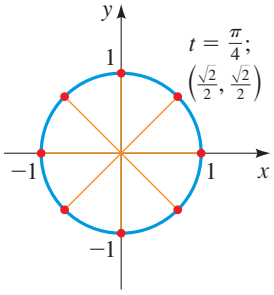
18. La coordenada x de P es positiva, y la coordenada y de P es $-\sqrt{5}/5$.

19. La coordenada x de P es $-\sqrt{2}/3$, y P está abajo del eje x.

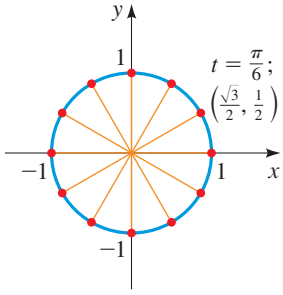
20. La coordenada x de P es $-\frac{2}{5}$, y P está arriba del eje x.

21-22 ■ Encuentre t y el punto terminal determinado por t para cada punto de la figura. En el Ejercicio 21, t aumenta en incrementos de $\pi/4$; al igual que en el Ejercicio 22, t aumenta en incrementos de $\pi/6$.

21.



22.



23-32 ■ Encuentre el punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por el valor dado de t.

23. $t = \dfrac{\pi}{2}$

24. $t = \dfrac{3\pi}{2}$

25. $t = \dfrac{5\pi}{6}$

26. $t = \dfrac{7\pi}{6}$

27. $t = -\dfrac{\pi}{3}$

28. $t = \dfrac{5\pi}{3}$

29. $t = \dfrac{2\pi}{3}$

30. $t = -\dfrac{\pi}{2}$

31. $t = -\dfrac{3\pi}{4}$

32. $t = \dfrac{11\pi}{6}$

33. Suponga que el punto terminal determinado por t es el punto $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ en la circunferencia unitaria. Encuentre el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.

(a) $\pi - t$ **(b)** $-t$

(c) $\pi + t$ **(d)** $2\pi + t$

34. Suponga que el punto terminal determinado por t es el punto $(\frac{3}{4}, \sqrt{7}/4)$ en la circunferencia unitaria. Encuentre el punto terminal determinado por cada uno de los siguientes.

(a) $-t$ **(b)** $4\pi + t$

(c) $\pi - t$ **(d)** $t - \pi$

35-38 ■ Encuentre el número de referencia para cada valor de t.

35. **(a)** $t = \dfrac{5\pi}{4}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{3}$

(c) $t = -\dfrac{4\pi}{3}$ **(d)** $t = \dfrac{\pi}{6}$

36. **(a)** $t = \dfrac{5\pi}{6}$ **(b)** $t = \dfrac{7\pi}{6}$

(c) $t = \dfrac{11\pi}{3}$ **(d)** $t = -\dfrac{7\pi}{4}$

37. **(a)** $t = \dfrac{5\pi}{7}$ **(b)** $t = -\dfrac{7\pi}{9}$

(c) $t = -3$ **(d)** $t = 5$

38. **(a)** $t = \dfrac{11\pi}{5}$ **(b)** $t = -\dfrac{9\pi}{7}$

(c) $t = 6$ **(d)** $t = -7$

39-52 ■ Encuentre **(a)** el número de referencia para cada valor de t y **(b)** el punto terminal determinado por t.

39. $t = \dfrac{2\pi}{3}$

40. $t = \dfrac{4\pi}{3}$

41. $t = \dfrac{3\pi}{4}$

42. $t = \dfrac{7\pi}{3}$

43. $t = -\dfrac{2\pi}{3}$

44. $t = -\dfrac{7\pi}{6}$

45. $t = \dfrac{13\pi}{4}$

46. $t = \dfrac{13\pi}{6}$

47. $t = \dfrac{7\pi}{6}$

48. $t = \dfrac{17\pi}{4}$

49. $t = -\dfrac{11\pi}{3}$

50. $t = \dfrac{31\pi}{6}$

51. $t = \dfrac{16\pi}{3}$

52. $t = -\dfrac{41\pi}{4}$

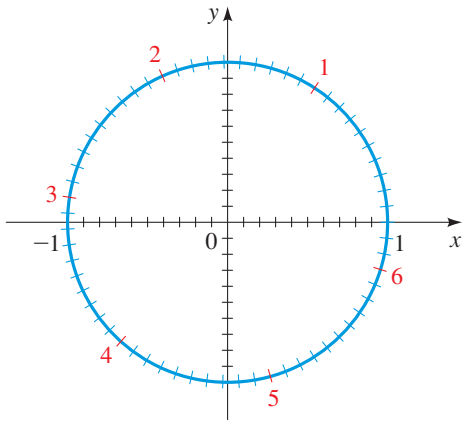
53-56 ■ Use la figura para hallar el punto terminal determinado por el número real t, con coordenadas redondeadas a un lugar decimal.

53. $t = 1$

54. $t = 2.5$

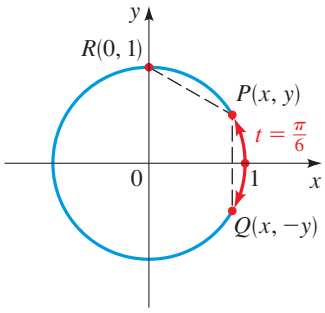
55. $t = -1.1$

56. $t = 4.2$

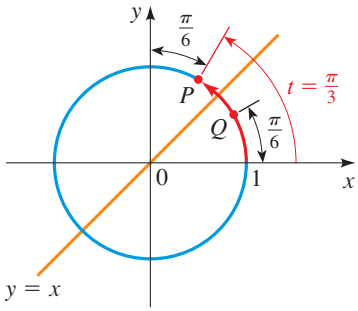


DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

57. Hallar el punto terminal para $\pi/6$ Suponga que el punto terminal determinado por $t = \pi/6$ es $P(x, y)$ y los puntos Q y R son como se ve en la figura. ¿Por qué son iguales las distancias PQ y PR? Use este dato, junto con la Fórmula de la Distancia, para demostrar que las coordenadas de P satisfacen la ecuación $2y = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$. Simplifique esta ecuación usando el hecho de que $x^2 + y^2 = 1$. Resuelva la ecuación simplificada para hallar $P(x, y)$.



58. Hallar el punto terminal para $\pi/3$ Ahora que ya sabe usted el punto terminal determinado por $t = \pi/6$, use simetría para hallar el punto terminal determinado por $t = \pi/3$ (vea la figura). Explique su razonamiento.



5.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE NÚMEROS REALES

Las funciones trigonométricas ▶ Valores de las funciones trigonométricas ▶ Identidades fundamentales

Una función es una regla que asigna a cada número real otro número real. En esta sección usamos propiedades de la circunferencia unitaria de la sección precedente para definir las funciones trigonométricas.

▼ Las funciones trigonométricas

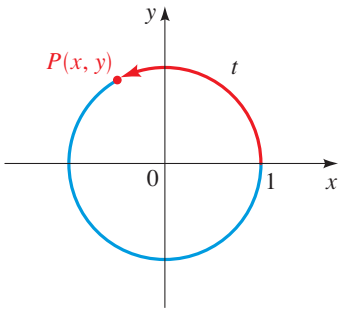


FIGURA 1

Recuerde que para hallar el punto terminal $P(x, y)$ para un número real dado t, nos movemos una distancia t a lo largo de la circunferencia unitaria, empezando en el punto $(1, 0)$. Nos movemos en dirección contraria al giro de las manecillas del reloj si t es positiva y en la dirección de las manecillas si t es negativa (vea Figura 1). A continuación usamos las coordenadas x y y del punto $P(x, y)$ para definir varias funciones. Por ejemplo, definimos la función llamada *seno* al asignar a cada número real t la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ determinado por t. Las funciones *coseno*, *tangente*, *cosecante*, *secante* y *cotangente* también se definen si usamos las coordenadas de $P(x, y)$.

DEFINICIÓN DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea t cualquier número real y sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por t. Definimos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x \qquad \tan t = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0)$$

$$\csc t = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0) \qquad \sec t = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \qquad \cot t = \frac{x}{y} \quad (y \neq 0)$$

Debido a que las funciones trigonométricas se pueden definir en términos de la circunferencia unitaria, a veces reciben el nombre de **funciones circulares**.

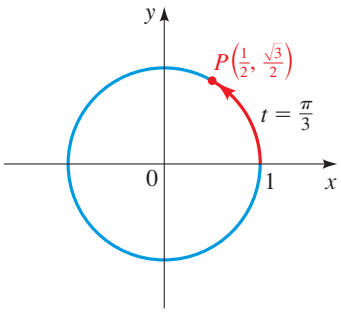


FIGURA 2

EJEMPLO 1 | Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre las seis funciones trigonométricas de cada número real t dado.

(a) $t = \dfrac{\pi}{3}$ **(b)** $t = \dfrac{\pi}{2}$

SOLUCIÓN

(a) De la Tabla 1 de la página 372, vemos que el punto terminal determinado por $t = \pi/3$ es $P\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}/2\right)$. (Vea Figura 2.) Como las coordenadas son $x = \frac{1}{2}$ y $y = \sqrt{3}/2$, tenemos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

$$\csc\frac{\pi}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \sec\frac{\pi}{3} = 2 \qquad \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

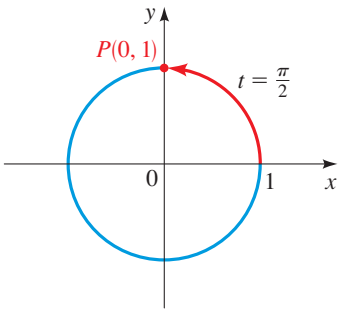


FIGURA 3

(b) El punto terminal determinado por $\pi/2$ es $P(0, 1)$. (Vea Figura 3.) Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1 \qquad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \qquad \csc\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} = 1 \qquad \cot\frac{\pi}{2} = \frac{0}{1} = 0$$

Pero $\tan \pi/2$ y $\sec \pi/2$ no están definidos porque $x = 0$ aparece en el denominador en cada una de sus definiciones.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 3

Algunos valores especiales de las funciones trigonométricas se dan en la Tabla 1. Esta tabla se obtiene con facilidad de la Tabla 1 de la Sección 5.1, junto con las definiciones de las funciones trigonométricas.

TABLA 1
Valores especiales de las funciones trigonométricas

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1	0	—	1	—
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	—	1	—	0

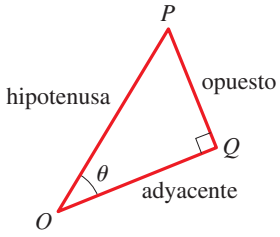
Podemos fácilmente recordar los senos y cosenos de los ángulos básicos si los escribimos en la forma $\sqrt{\square}/2$:

t	sen t	cos t
0	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\pi/6$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
$\pi/2$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{0}/2$

El Ejemplo 1 muestra que algunas de las funciones trigonométricas no están definidas para ciertos números reales, por lo cual es necesario determinar sus dominios. Las funciones seno y coseno están definidas para todos los valores de t. Como las funciones cotangente y cosecante tienen y en el denominador de sus definiciones, no están definidas siempre que la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ determinado por t sea 0. Esto ocurre cuando $t = n\pi$ para cualquier entero n, de modo que sus dominios no incluyen estos puntos. Las funciones tangente y secante tienen x en el denominador en sus definiciones, de modo que no están definidas siempre que $x = 0$. Esto ocurre cuando $t = (\pi/2) + n\pi$ para cualquier entero n.

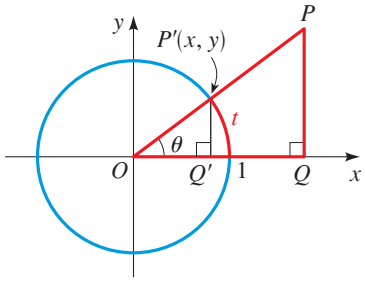
Relación con las funciones trigonométricas de ángulos

Si ya usted ha estudiado trigonometría de triángulos rectángulos (Capítulo 6), es probable se pregunte cómo el seno y coseno de un *ángulo* se relacionan con los de esta sección. Para ver cómo es esto, empecemos con un triángulo rectángulo, ΔOPQ.



Triángulo rectángulo OPQ

Ponga el triángulo en el plano de coordenadas como se muestra, con el ángulo θ en posición normal.



$P'(x, y)$ es el punto terminal determinado por t.

El punto $P'(x, y)$ de la figura es el punto terminal determinado por el arco t. Observe que el triángulo OPQ es semejante al triángulo pequeño $OP'Q'$ cuyos catetos tienen longitudes x y y.

A continuación, por la definición de las funciones trigonométricas del ángulo θ tenemos:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{op}}{\text{hip}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{P'Q'}{OP'}$$

$$= \frac{y}{1} = y$$

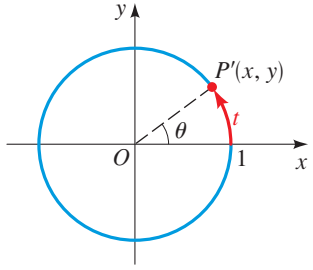
$$\cos\theta = \frac{\text{ady}}{\text{hip}} = \frac{OQ}{OP} = \frac{OQ'}{OP'}$$

$$= \frac{x}{1} = x$$

Por la definición de las funciones trigonométricas del *número real* t, tenemos

$$\operatorname{sen} t = y \qquad \cos t = x$$

A continuación, si θ se mide en radianes, entonces $\theta = t$ (vea la figura). Por lo tanto, las funciones trigonométricas del ángulo con medida en radianes θ son exactamente iguales que las funciones trigonométricas definidas en términos del punto terminal determinado por el número real t.



La medida en radianes del ángulo θ es t.

¿Por qué entonces estudiar trigonometría en dos formas diferentes? Porque diferentes aplicaciones requieren que veamos las funciones trigonométricas de modo diferente. (Compare la Sección 5.6 con las Secciones 6.2, 6.5 y 6.6.)

DOMINIOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Función	Dominio
sen x, cos x	Todos los números reales
tan x, sec x	Todos los números reales que no sean $\frac{\pi}{2} + n\pi$ para cualquier entero n
cot x, csc x	Todos los números reales que no sean $n\pi$ para cualquier entero n

Valores de las funciones trigonométricas

Para calcular otros valores de las funciones trigonométricas, primero determinamos sus signos. Los signos de las funciones trigonométricas dependen del cuadrante en el que se encuentre el punto terminal de t. Por ejemplo, si el punto terminal $P(x, y)$ determinado por t está en el tercer cuadrante, entonces sus coordenadas son negativas ambas. En consecuencia, sen t, cos t, csc t y sec t son todas negativas, mientras que tan t y cos t son positivas. Se pueden comprobar las otras entradas del recuadro siguiente.

SIGNOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Cuadrante	Funciones positivas	Funciones negativas
I	todas	ninguna
II	sen x, csc x	cos x, sec x, tan x, cot x
III	tan x, cot x	sen x, csc x, cos x, sec x
IV	cos x, sec x	sen x, csc x, tan x, cot x

Por ejemplo, $\cos(2\pi/3) < 0$ porque el punto terminal de $t = 2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, mientras que $\tan 4 > 0$ porque el punto terminal de $t = 4$ está en el tercer cuadrante.

En la Sección 5.1 utilizamos el número de referencia para hallar el punto terminal determinado por un número real t. Como las funciones trigonométricas están definidas en términos de las coordenadas de puntos terminales, podemos usar el número de referencia para hallar valores de las funciones trigonométricas. Suponga que $\bar{t}$ es el número de referencia para t. Entonces el punto terminal de $\bar{t}$ tiene las mismas coordenadas, excepto posiblemente por el signo, como el punto terminal de t. Entonces, los valores de las funciones trigonométricas en t son iguales, excepto posiblemente por el signo, como sus valores en $\bar{t}$. Ilustramos este procedimiento en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 | Evaluación de funciones trigonométricas

Encuentre cada valor de lo siguiente.

(a) $\cos\dfrac{2\pi}{3}$ **(b)** $\tan\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ **(c)** $\operatorname{sen}\dfrac{19\pi}{4}$

SOLUCIÓN

(a) El número de referencia para $2\pi/3$ es $\pi/3$ (vea Figura 4(a)). Como el punto terminal de $2\pi/3$ está en el segundo cuadrante, $\cos(2\pi/3)$ es negativo. Entonces,

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

Signo — Número de referencia — De la Tabla 1

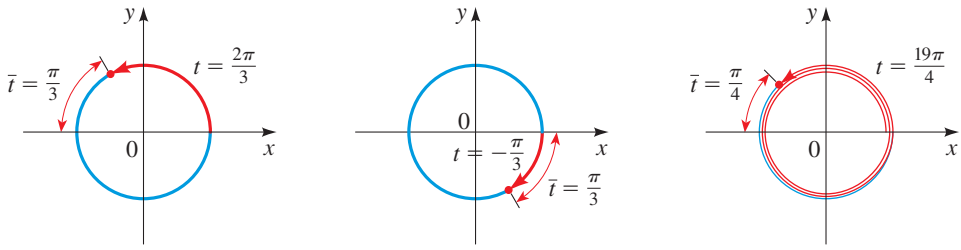


FIGURA 4 (a) (b) (c)

(b) El número de referencia para $-\pi/3$ es $\pi/3$ (vea Figura 4(b)). Como el punto terminal es $-\pi/3$ está en el cuarto cuadrante, $\tan(-\pi/3)$ es negativa. Por lo tanto,

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Signo | Número de referencia | De la Tabla 1

(c) Como $(19\pi/4) - 4\pi = 3\pi/4$, los puntos terminales determinados por $19\pi/4$ y $3\pi/4$ son los mismos. El número de referencia para $3\pi/4$ es $\pi/4$ (vea Figura 4(c)). Como el punto terminal de $3\pi/4$ está en el segundo cuadrante, $\operatorname{sen}(3\pi/4)$ es positivo. Entonces,

$$\operatorname{sen}\frac{19\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} = +\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Reste 4π | Signo | Número de referencia | De la Tabla 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **7**

Hasta este punto, hemos podido calcular los valores de las funciones trigonométricas sólo para ciertos valores de t. De hecho, podemos calcular los valores de las funciones trigonométricas siempre que t sea múltiplo de $\pi/6$, $\pi/4$, $\pi/3$ y $\pi/2$. ¿Cómo podemos calcular las funciones trigonométricas para otros valores de t? Por ejemplo, ¿cómo podemos hallar sen 1.5? Una forma es trazando cuidadosamente un diagrama y leer el valor (vea Ejercicios 39-46), pero este método no es muy preciso. Por fortuna, programados directamente en calculadoras científicas son procedimientos matemáticos (vea nota al margen en la página 400) que encuentran los valores de las funciones *seno*, *coseno* y *tangente* redondeados al número de dígitos en la pantalla. La calculadora debe ser puesta en el *modo de radianes* para evaluar estas funciones. Para hallar valores de las funciones cosecante, secante y cotangente usando una calculadora, necesitamos usar las siguientes *relaciones recíprocas:*

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t}$$

Estas identidades se siguen de las definiciones de las funciones trigonométricas. Por ejemplo, como $\operatorname{sen} t = y$ y $\csc t = 1/y$, tenemos $\csc t = 1/y = 1/(\operatorname{sen} t)$. Los otros se obtienen de un modo semejante.

EJEMPLO 3 | Uso de calculadora para evaluar funciones trigonométricas

Asegurándonos que nuestra calculadora esté puesta en el modo de radianes y redondeando los resultados a seis lugares decimales, obtenemos:

(a) $\operatorname{sen} 2.2 \approx 0.808496$ **(b)** $\cos 1.1 \approx 0.453596$

(c) $\cot 28 = \dfrac{1}{\tan 28} \approx -3.553286$ **(d)** $\csc 0.98 = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 0.98} \approx 1.204098$

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **41** Y **43**

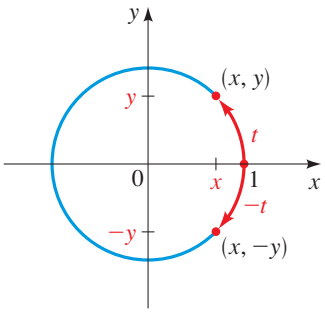


FIGURA 5

Las funciones pares e impares están definidas en la Sección 2.5.

Consideremos la relación entre las funciones trigonométricas de t y las de $-t$. De la Figura 5 vemos que

$$\operatorname{sen}(-t) = -y = -\operatorname{sen} t$$
$$\cos(-t) = x = \cos t$$
$$\tan(-t) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\tan t$$

Estas identidades muestran que las funciones seno y tangente son funciones impares, en tanto que la función coseno es una función par. Es fácil ver que la recíproca de una función par es par y la recíproca de una función impar es impar. Este dato, junto con las relaciones recíprocas, completa nuestro conocimiento de las propiedades par-impar para todas las funciones trigonométricas.

PROPIEDADES PARES-IMPARES

Las funciones seno, cosecante, tangente y cotangente son funciones impares; las funciones coseno y secante son funciones pares.

$$\operatorname{sen}(-t) = -\operatorname{sen} t \qquad \cos(-t) = \cos t \qquad \tan(-t) = -\tan t$$
$$\csc(-t) = -\csc t \qquad \sec(-t) = \sec t \qquad \cot(-t) = -\cot t$$

EJEMPLO 4 | Funciones trigonométricas pares e impares

Use las propiedades pares-impares de las funciones trigonométricas para determinar cada valor.

(a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ **(b)** $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

SOLUCIÓN Por las propiedades pares-impares y la Tabla 1 tenemos

(a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ Seno es impar

(b) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ Coseno es par

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

Identidades fundamentales

Las funciones trigonométricas están relacionadas entre sí por medio de expresiones llamadas **identidades trigonométricas**. Damos las más importantes en el recuadro siguiente.*

IDENTIDADES FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} \qquad \cot t = \frac{\cos t}{\operatorname{sen} t}$$

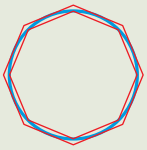
Identidades de Pitágoras

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1 \qquad \tan^2 t + 1 = \sec^2 t \qquad 1 + \cot^2 t = \csc^2 t$$

* Seguimos la convención acostumbrada de escribir $\operatorname{sen}^2 t$ por $(\operatorname{sen} t)^2$. En general, escribimos $\operatorname{sen}^n t$ por $(\operatorname{sen} t)^n$ por todos los enteros n excepto $n = -1$. Al exponente $n = -1$ se le asignará otro significado en la Sección 5.5. Por supuesto, la misma convención aplica a las otras cinco funciones trigonométricas.

El valor de π

El número π es la relación entre la circunferencia de un círculo y su diámetro. Desde la Antigüedad se ha sabido que esta relación es la misma para todos las circunferencias. El primer esfuerzo sistemático para hallar una aproximación numérica para π fue hecho por Arquímedes (hacia el año 240 a.C.), quien demostró que $\frac{22}{7} < \pi < \frac{223}{71}$ al hallar los perímetros de polígonos regulares inscritos y circunscritos alrededor de la circunferencia.



Hacia el año 480 a.C., el físico chino Tsu Ch'ung-chih dio la aproximación

$$\pi \approx \frac{355}{113} = 3.141592\ldots$$

que es correcta a seis lugares decimales. Esta estimación siguió siendo la más precisa de π hasta que el matemático holandés Adrianus Romanus (1593) utilizó polígonos con más de mil millones de lados para calcular π correcto a 15 lugares decimales. En el siglo XVII, los matemáticos empezaron a usar series infinitas e identidades trigonométricas en busca de π. El inglés William Shanks se pasó 15 años (1858-1873) usando estos métodos para calcular π a 707 decimales, pero en 1946 se encontró que sus cifras estaban erróneas empezando con el decimal 528. En la actualidad, con ayuda de computadoras, de manera rutinaria los matemáticos determinan π correcto a millones de lugares decimales. El récord actual es que π ha sido calculado a 2, 576, 980, 370, 000 (más de dos billones, 10^{12}) de lugares decimales por T. Daesuke y su equipo.

DEMOSTRACIÓN Las identidades recíprocas se siguen inmediatamente de las definiciones de la página 377. A continuación demostramos las identidades de Pitágoras. Por definición, $\cos t = x$ y $\operatorname{sen} t = y$, donde x y y son las coordenadas de un punto $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria. Como $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, tenemos que $x^2 + y^2 = 1$. Por lo tanto

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

Dividiendo ambos lados entre $\cos^2 t$ (siempre que $\cos t \neq 0$), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t} + \frac{\cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

$$\left(\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos t}\right)^2$$

$$\tan^2 t + 1 = \sec^2 t$$

Hemos utilizado las identidades recíprocas $\operatorname{sen} t/\cos t = \tan t$ y $1/\cos t = \sec t$. Análogamente, dividiendo ambos lados de la primera identidad de Pitágoras entre $\operatorname{sen}^2 t$ (siempre que $\operatorname{sen} t \neq 0$) nos da $1 + \cot^2 t = \csc^2 t$. ■

Como sus nombres lo indican, las identidades fundamentales desempeñan un papel esencial en trigonometría porque podemos usarlas para relacionar cualquier función trigonométrica con cualquiera otra. Por lo tanto, si conocemos el valor de cualquiera de las funciones trigonométricas en t, entonces podemos hallar los valores de todas las otras en t.

EJEMPLO 5 | Hallar todas las funciones trigonométricas a partir del valor de una de ellas

Si $\cos t = \frac{3}{5}$ y t está en el cuarto cuadrante, encuentre los valores de todas las funciones trigonométricas en t.

SOLUCIÓN De las identidades de Pitágoras tenemos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 = 1 \qquad \text{Sustituya } \cos t = \tfrac{3}{5}$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \tfrac{9}{25} = \tfrac{16}{25} \qquad \text{Despeje } \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} t = \pm\tfrac{4}{5} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como este punto está en el cuarto cuadrante, $\operatorname{sen} t$ es negativo, de modo que $\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5}$. Ahora que conocemos $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$, podemos hallar los valores de las otras funciones trigonométricas usando las identidades recíprocas:

$$\operatorname{sen} t = -\frac{4}{5} \qquad \cos t = \frac{3}{5} \qquad \tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\csc t = \frac{1}{\operatorname{sen} t} = -\frac{5}{4} \qquad \sec t = \frac{1}{\cos t} = \frac{5}{3} \qquad \cot t = \frac{1}{\tan t} = -\frac{3}{4}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65** ■

EJEMPLO 6 | Escribir una función trigonométrica en términos de otra

Escriba $\tan t$ en términos de $\cos t$, donde t está en el tercer cuadrante.

SOLUCIÓN Como $\tan t = \operatorname{sen} t/\cos t$, necesitamos escribir sen t en términos de cos t. Por las identidades de Pitágoras tenemos

$$\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t = 1$$

$$\operatorname{sen}^2 t = 1 - \cos^2 t \qquad \text{Despeje } \operatorname{sen}^2 t$$

$$\operatorname{sen} t = \pm\sqrt{1 - \cos^2 t} \qquad \text{Tome raíces cuadradas}$$

Como sen t es negativo en el tercer cuadrante, el signo negativo aplica aquí. Por lo tanto,

$$\tan t = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t} = \frac{-\sqrt{1 - \cos^2 t}}{\cos t}$$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **55**

5.2 EJERCICIOS

CONCEPTOS

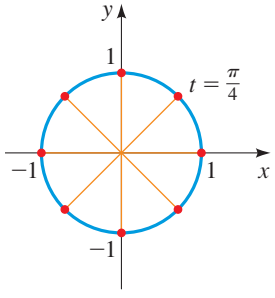
1. Sea $P(x, y)$ el punto terminal en la circunferencia unitaria determinado por t. Entonces sen t = ____, cos t = ____, y tan t = ____.

2. Si $P(x, y)$ está en la circunferencia unitaria, entonces $x^2 + y^2$ = ____. Entonces, para toda t tenemos $\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t$ = ____.

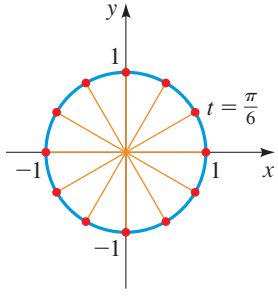
HABILIDADES

3–4 ■ Encuentre sen t y cos t para los valores de t cuyos puntos terminales se muestran en la circunferencia unitaria en la figura. En el ejercicio 3, t crece con incrementos de $\pi/4$; en el ejercicio 4, t aumenta con incrementos de $\pi/6$. (Vea los ejercicios 21 y 22 en la sección 5.1.)

3.



4.



5-24 ■ Encuentre el valor exacto de la función trigonométrica en el número real dado.

5. (a) $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}$ (b) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (c) $\tan\frac{2\pi}{3}$

6. (a) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}$ (b) $\cos\frac{5\pi}{6}$ (c) $\tan\frac{5\pi}{6}$

7. (a) $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{6}$ (b) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ (c) $\operatorname{sen}\frac{11\pi}{6}$

8. (a) $\cos\frac{5\pi}{3}$ (b) $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ (c) $\cos\frac{7\pi}{3}$

9. (a) $\cos\frac{3\pi}{4}$ (b) $\cos\frac{5\pi}{4}$ (c) $\cos\frac{7\pi}{4}$

10. (a) $\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}$ (b) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ (c) $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}$

11. (a) $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{3}$ (b) $\csc\frac{7\pi}{3}$ (c) $\cot\frac{7\pi}{3}$

12. (a) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (c) $\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

13. (a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (b) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (c) $\cot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

14. (a) $\operatorname{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ (b) $\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ (c) $\cot\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

15. (a) $\sec\frac{11\pi}{3}$ (b) $\csc\frac{11\pi}{3}$ (c) $\sec\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

16. (a) $\cos\frac{7\pi}{6}$ (b) $\sec\frac{7\pi}{6}$ (c) $\csc\frac{7\pi}{6}$

17. (a) $\tan\frac{5\pi}{6}$ (b) $\tan\frac{7\pi}{6}$ (c) $\tan\frac{11\pi}{6}$

18. (a) $\cot\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ (b) $\cot\frac{2\pi}{3}$ (c) $\cot\frac{5\pi}{3}$

19. (a) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (b) $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ (c) $\cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

20. (a) $\operatorname{sen}\frac{5\pi}{4}$ (b) $\sec\frac{5\pi}{4}$ (c) $\tan\frac{5\pi}{4}$

21. (a) $\csc\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (b) $\csc\frac{\pi}{2}$ (c) $\csc\frac{3\pi}{2}$

22. (a) $\sec(-\pi)$ (b) $\sec\pi$ (c) $\sec 4\pi$

23. (a) $\operatorname{sen} 13\pi$ (b) $\cos 14\pi$ (c) $\tan 15\pi$

24. (a) $\operatorname{sen}\frac{25\pi}{2}$ (b) $\cos\frac{25\pi}{2}$ (c) $\cot\frac{25\pi}{2}$

25-28 ■ Encuentre el valor de cada una de las seis funciones trigonométricas (si está definido) en el número real t dado. Use sus respuestas para completar la tabla.

25. $t = 0$ **26.** $t = \frac{\pi}{2}$ **27.** $t = \pi$ **28.** $t = \frac{3\pi}{2}$

t	sen t	cos t	tan t	csc t	sec t	cot t
0	0	1		indefinido		
$\frac{\pi}{2}$						
π			0			indefinido
$\frac{3\pi}{2}$						

29-38 ■ Nos dan el punto terminal $P(x, y)$ determinado por un número real t. Encuentre sen t, cos t y tan t.

29. $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ **30.** $\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$

31. $\left(\frac{\sqrt{5}}{4}, -\frac{\sqrt{11}}{4}\right)$ **32.** $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

33. $\left(-\frac{6}{7}, \frac{\sqrt{13}}{7}\right)$ **34.** $\left(\frac{40}{41}, \frac{9}{41}\right)$

35. $\left(-\frac{5}{13}, -\frac{12}{13}\right)$ **36.** $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

37. $\left(-\frac{20}{29}, \frac{21}{29}\right)$ **38.** $\left(\frac{24}{25}, -\frac{7}{25}\right)$

39-46 ■ Encuentre un valor aproximado de la función trigonométrica dada usando **(a)** la figura y **(b)** una calculadora. Compare los dos resultados.

39. sen 1

40. cos 0.8

41. sen 1.2

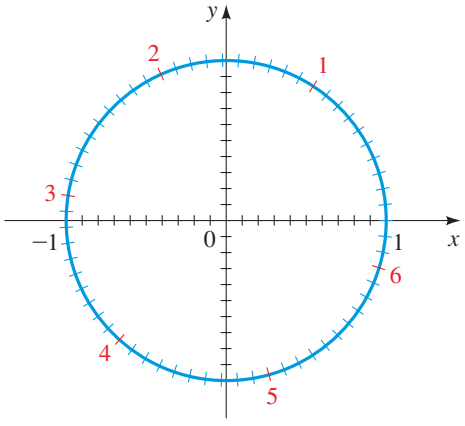
42. cos 5

43. tan 0.8

44. tan(−1.3)

45. cos 4.1

46. sen(−5.2)



47-50 ■ Encuentre el signo de la expresión si el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

47. sen t cos t, Cuadrante II **48.** tan t sec t, Cuadrante IV

49. $\frac{\tan t \operatorname{sen} t}{\cot t}$, Cuadrante III **50.** cos t sec t, cualquier cuadrante

51-54 ■ De la información dada, encuentre el cuadrante en el que se encuentre el punto terminal determinado por t.

51. sen $t > 0$ y cos $t < 0$ **52.** tan $t > 0$ y sen $t < 0$

53. csc $t > 0$ y sec $t < 0$ **54.** cos $t < 0$ y cot $t < 0$

55-64 ■ Escriba la primera expresión en términos de la segunda si el punto terminal determinado por t está en el cuadrante dado.

55. sen t, cos t; Cuadrante II **56.** cos t, sen t; Cuadrante IV

57. tan t, sen t; Cuadrante IV **58.** tan t, cos t; Cuadrante III

59. sec t, tan t; Cuadrante II **60.** csc t, cot t; Cuadrante III

61. tan t, sec t; Cuadrante III **62.** sen t, sec t; Cuadrante IV

63. $\tan^2 t$, sen t; cualquier cuadrante

64. $\sec^2 t \operatorname{sen}^2 t$, cos t; cualquier cuadrante

65-72 ■ Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de t a partir de la información dada.

65. sen $t = \frac{3}{5}$, el punto terminal de t está en el cuadrante II

66. cos $t = -\frac{4}{5}$, el punto terminal de t está en el cuadrante III

67. sec $t = 3$, el punto terminal de t está en el cuadrante IV

68. tan $t = \frac{1}{4}$, el punto terminal de t está en el cuadrante III

69. tan $t = -\frac{3}{4}$, cos $t > 0$

70. sec $t = 2$, sen $t < 0$

71. sen $t = -\frac{1}{4}$, sec $t < 0$

72. tan $t = -4$, csc $t > 0$

73-80 ■ Determine si la función es par, impar o ninguna de éstas.

73. $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ **74.** $f(x) = x^2 \cos 2x$

75. $f(x) = \operatorname{sen} x \cos x$ **76.** $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$

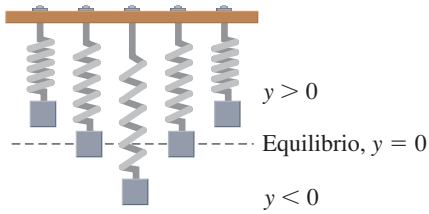
77. $f(x) = |x| \cos x$ **78.** $f(x) = x \operatorname{sen}^3 x$

79. $f(x) = x^3 + \cos x$ **80.** $f(x) = \cos(\operatorname{sen} x)$

APLICACIONES

81. Movimiento armónico El desplazamiento a partir del equilibrio de una masa oscilante unida a un resorte está dado por $y(t) = 4 \cos 3\pi t$, donde y se mide en pulgadas y t en segundos. Encuentre el desplazamiento en los tiempos indicados en la tabla.

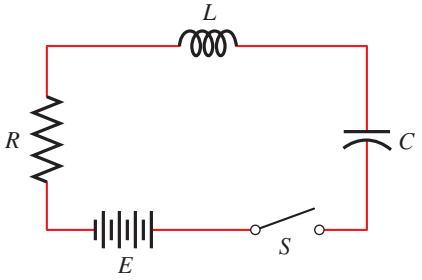
t	$y(t)$
0	
0.25	
0.50	
0.75	
1.00	
1.25	



82. Ritmos circadianos Nuestra presión sanguínea varía en el curso del día. En cierta persona, la presión diastólica en reposo en el tiempo t está dada por $B(t) = 80 + 7 \operatorname{sen}(\pi t/12)$, donde t se mide en horas desde la medianoche y $B(t)$ en mmHg (milímetros de mercurio). Encuentre la presión sanguínea de esta persona a las

(a) 6:00 a.m. **(b)** 10:30 a.m. **(c)** Mediodía **(d)** 8:00 p.m.

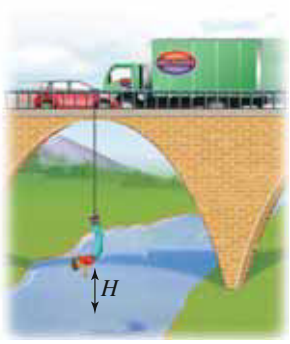
83. Circuito eléctrico Después de cerrar el interruptor del circuito mostrado, la corriente t segundos más tarde es $I(t) = 0.8e^{-3t}\,\text{sen}\,10t$. Encuentre la corriente en los tiempos **(a)** $t = 0.1$ s y **(b)** $t = 0.5$ s.



$L = 10^3$ h
$R = 6 \times 10^3\ \Omega$
$C = 9.17\ \mu$f
$E = 4.8 \times 10^3$ V

84. Salto en bungee Una saltadora de cuerda elástica (llamada *bungee*) se deja caer desde un elevado puente hasta el río y luego rebota una y otra vez. En el tiempo t segundos después de su salto, su altura H (en metros) sobre el río está dada por $H(t) = 100 + 75e^{-t/20}\cos(\frac{\pi}{4}t)$. Encuentre la altura en que se encuentre ella en los tiempos indicados en la tabla.

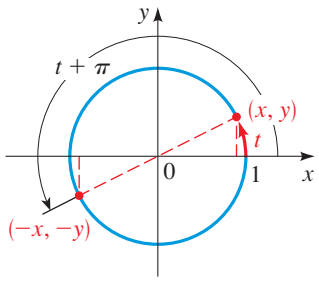
t	$H(t)$
0	
1	
2	
4	
6	
8	
12	



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

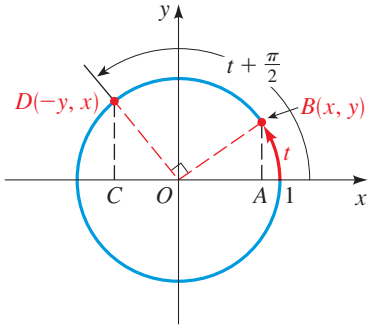
85. Fórmulas de reducción Una *fórmula de reducción* es aquella que se puede usar para "reducir" el número de términos en la entrada para una función trigonométrica. Explique usted la forma en que la figura muestra que son válidas las fórmulas de reducción siguientes:

$$\text{sen}(t + \pi) = -\text{sen}\,t \qquad \cos(t + \pi) = -\cos t$$
$$\tan(t + \pi) = \tan t$$



86. Más fórmulas de reducción: Por el teorema de "ángulo-lado-ángulo" de geometría elemental, los triángulos CDO y AOB de la figura siguiente son congruentes. Explique la forma en que esto demuestra que si B tiene coordenadas (x, y), entonces D tiene coordenadas $(-y, x)$. A continuación, explique cómo es que la figura muestra que las fórmulas de reducción siguientes son válidas:

$$\text{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos t$$
$$\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\text{sen}\,t$$
$$\tan\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot t$$



5.3 GRÁFICAS TRIGONOMÉTRICAS

Gráficas de las funciones seno y coseno ▶ Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno ▶ Uso de calculadoras graficadoras para graficar funciones trigonométricas

La gráfica de una función nos da una mejor idea de su comportamiento. Entonces, en esta sección graficamos las funciones seno y coseno y ciertas transformaciones de estas funciones. Las otras funciones trigonométricas se grafican en la sección siguiente.

▼ Gráficas de las funciones seno y coseno

Para ayudarnos a graficar las funciones seno y coseno, primero observamos que estas funciones repiten sus valores en forma regular. Para ver exactamente cómo ocurre esto, recuerde que la circunferencia del círculo unitario es 2π. Se deduce que el punto terminal $P(x, y)$ determinado por el número real t es el mismo que el determinado por $t + 2\pi$. Como las

funciones seno y coseno están en términos de las coordenadas de $P(x, y)$, se deduce que sus valores no cambian con la adición de cualquier múltiplo entero de 2π. En otras palabras,

$$\operatorname{sen}(t + 2n\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

$$\cos(t + 2n\pi) = \cos t \qquad \text{para cualquier entero } n$$

Entonces, las funciones seno y coseno son *periódicas* de acuerdo con la siguiente definición: Una función f es **periódica** si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t. El mínimo de tal número positivo (si existe) es el **período** de f. Si f tiene período p, entonces la gráfica de f en cualquier intervalo de longitud p se denomina **período completo** de f.

PROPIEDADES PERIÓDICAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Las funciones seno y coseno tienen período 2π:

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

TABLA 1

t	sen t	cos t
$0 \to \frac{\pi}{2}$	$0 \to 1$	$1 \to 0$
$\frac{\pi}{2} \to \pi$	$1 \to 0$	$0 \to -1$
$\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$0 \to -1$	$-1 \to 0$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$-1 \to 0$	$0 \to 1$

Entonces las funciones seno y coseno repiten sus valores en cualquier intervalo de longitud 2π. Para trazar sus gráficas, primero graficamos un período. Para trazar las gráficas sobre el intervalo $0 \le t \le 2\pi$, podríamos tratar de hacer una tabla de valores y usar esos puntos para trazar la gráfica. Como no se puede completar dicha tabla, veamos más de cerca las definiciones de estas funciones.

Recuerde que sen t es la coordenada y del punto terminal $P(x, y)$ en la circunferencia unitaria determinado por el número real t. ¿Cómo varía la coordenada y de este punto cuando t aumenta? Es fácil ver que la coordenada y de $P(x, y)$ aumenta a 1, luego disminuye a -1 repetidamente cuando el punto $P(x, y)$ se mueve alrededor del círculo unitario. (Vea Figura 1.) De hecho, cuando t aumenta de 0 a $\pi/2$, $y = \operatorname{sen} t$ aumenta de 0 a 1. Cuando t aumenta de $\pi/2$ a π, el valor de $y = \operatorname{sen} t$ disminuye de 1 a 0. La Tabla 1 muestra la variación de las funciones seno y coseno para t entre 0 y 2π.

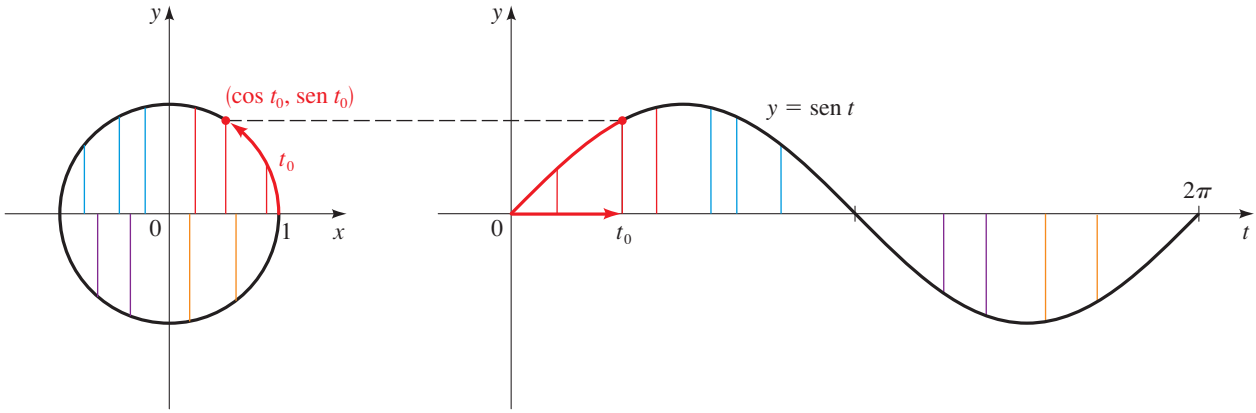


FIGURA 1

Para trazar las gráficas en forma más precisa, encontramos otros pocos valores de sen t y cos t en la Tabla 2. Podríamos también hallar otros valores con ayuda de una calculadora.

TABLA 2

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
sen t	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos t	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

A continuación usamos esta información para graficar las funciones sen t y cos t para t entre 0 y 2π en las Figuras 2 y 3. Éstas son las gráficas de un período. Usando el dato de que estas funciones son periódicas con período 2π, obtenemos sus gráficas completas al continuar la misma configuración a la izquierda y a la derecha en cada intervalo sucesivo de longitud 2π.

La gráfica de la función seno es simétrica con respecto al origen. Esto es como se esperaba, porque la función seno es una función impar. Como la función coseno es una función par, su gráfica es simétrica con respecto al eje y.

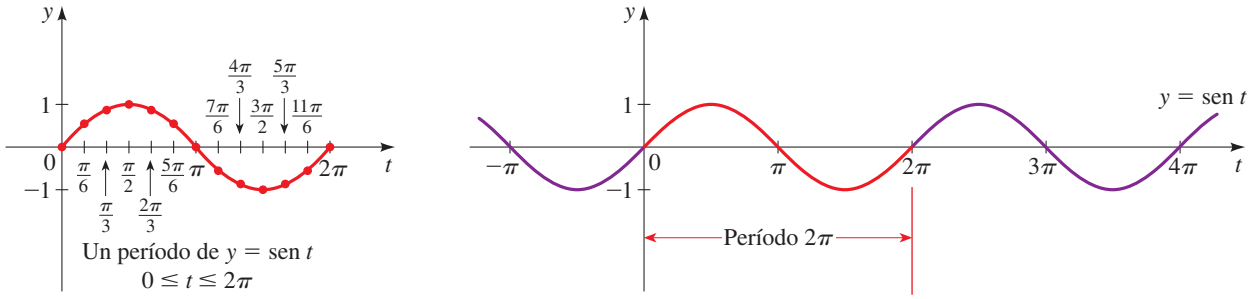


FIGURA 2 Gráfica de sen t

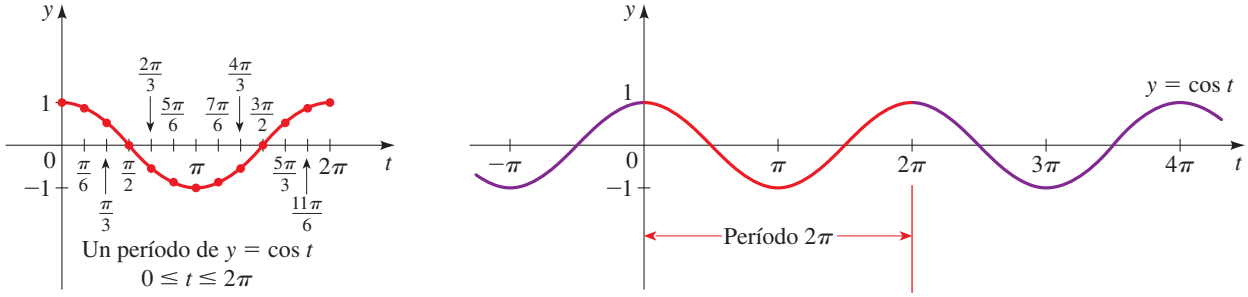


FIGURA 3 Gráfica de cos t

Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno

A continuación consideramos gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno. Entonces, las técnicas para graficar de la Sección 2.5 son muy útiles aquí. Las gráficas que obtenemos son importantes para entender aplicaciones a situaciones físicas tales como movimiento armónico (vea Sección 5.6), pero algunas de ellas son gráficas de atractivo aspecto que son interesantes por sí solas.

Es tradicional usar la letra x para denotar la variable del dominio de una función. Por lo tanto, de aquí en adelante usamos la letra x y escribimos $y = \text{sen } x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ y así sucesivamente para denotar estas funciones.

EJEMPLO 1 | Curvas de coseno

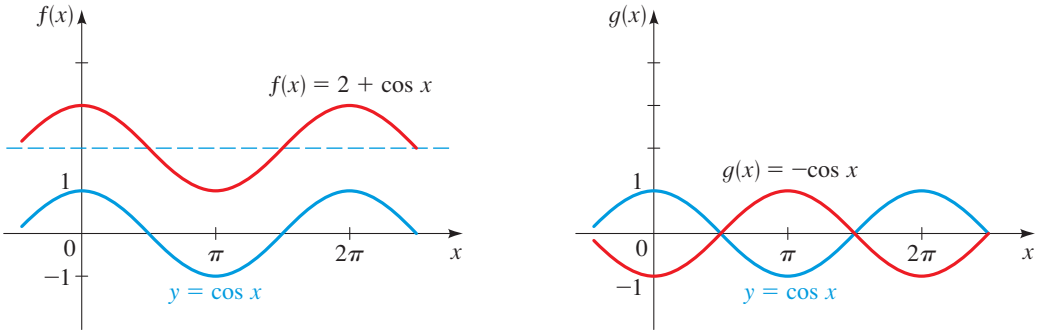
Trace la gráfica de cada función siguiente.

(a) $f(x) = 2 + \cos x$ **(b)** $g(x) = -\cos x$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = 2 + \cos x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$, pero desplazada 2 unidades (vea Figura 4(a)).

(b) La gráfica de $y = -\cos x$ en la Figura 4(b) es la reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en el eje x.



(a) (b)

FIGURA 4

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **3** Y **5**

Grafiquemos $y = 2 \operatorname{sen} x$. Empezamos con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y multiplicamos por 2 la coordenada y de cada punto. Esto tiene el efecto de alargar verticalmente la gráfica en un factor de 2. Para graficar $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$, empezamos con la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ y multiplicamos por $\frac{1}{2}$ la coordenada y de cada punto. Esto tiene el efecto de contraer verticalmente la gráfica en un factor de $\frac{1}{2}$ (vea Figura 5).

El alargamiento y contracción de gráficas se estudia en la Sección 2.5.

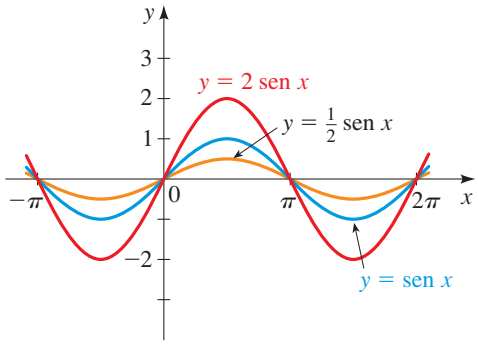


FIGURA 5

En general, para las funciones

$$y = a \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad y = a \cos x$$

el número $|a|$ se denomina **amplitud** y es el valor más grande que estas funciones alcanzan. En la Figura 6 se ilustran gráficas de $y = a \operatorname{sen} x$ para varios valores de a.

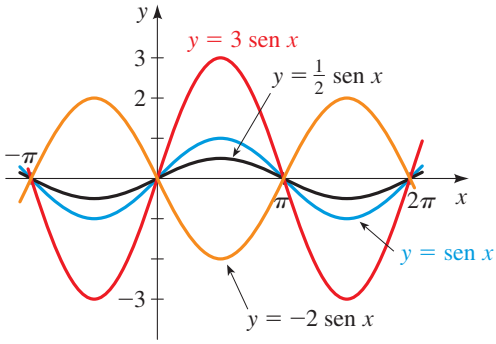


FIGURA 6

EJEMPLO 2 | Alargar una curva coseno

Encuentre la amplitud de $y = -3 \cos x$ y trace su gráfica.

SOLUCIÓN La amplitud es $|-3| = 3$, de modo que el valor más grande que la gráfica alcanza es 3 y el valor más pequeño es -3. Para trazar la gráfica, empezamos con la gráfica de $y = \cos x$, alargamos verticalmente la gráfica en un factor de 3 y reflejamos en el eje x, llegando a la gráfica de la Figura 7.

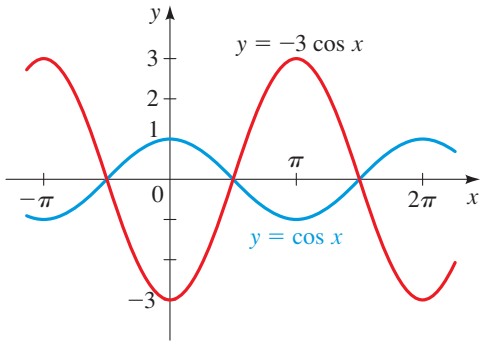


FIGURA 7

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 9

Como las funciones seno y coseno tienen períodos 2π, las funciones

$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

completan un período cuando kx varía de 0 a 2π, es decir, para $0 \le kx \le 2\pi$ o para $0 \le x \le 2\pi/k$. Entonces estas funciones completan un período cuando x varía entre 0 y $2\pi/k$ y por lo tanto tienen período $2\pi/k$. Las gráficas de estas funciones se denominan **curvas seno** y **curvas coseno**, respectivamente. (En forma colectiva, las curvas sinusoidales y las cosenoidales se conocen como curvas **sinusoidales**.

CURVAS SENO Y COSENO

Las curvas seno y coseno

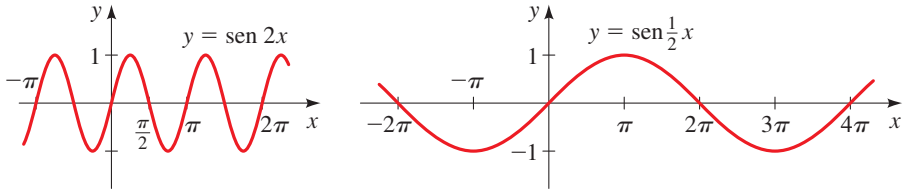
$$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$

tienen **amplitud** $|a|$ y **período** $2\pi/k$.

Un intervalo apropiado en el cual graficar un período completo es $[0, 2\pi/k]$.

El alargamiento y contracción de gráficas se estudia en la Sección 2.5.

Para ver cómo afecta el valor de k a la gráfica de $y = \operatorname{sen} kx$, grafiquemos la curva seno $y = \operatorname{sen} 2x$. Como el período es $2\pi/2 = \pi$, la gráfica completa un período en el intervalo $0 \le x \le \pi$ (vea Figura 8(a)). Para la curva seno $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$, el período es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$, de modo que la gráfica completa un período en el intervalo $0 \le x \le 4\pi$ (vea Figura 8(b)). Vemos que el efecto es *contraer* la gráfica horizontalmente si $k > 1$ o *alargar* la gráfica horizontalmente si $k < 1$.



(a) (b)

FIGURA 8

Por comparación, en la Figura 9 mostramos las gráficas de un período de la curva seno $y = a \operatorname{sen} kx$ para varios valores de k.

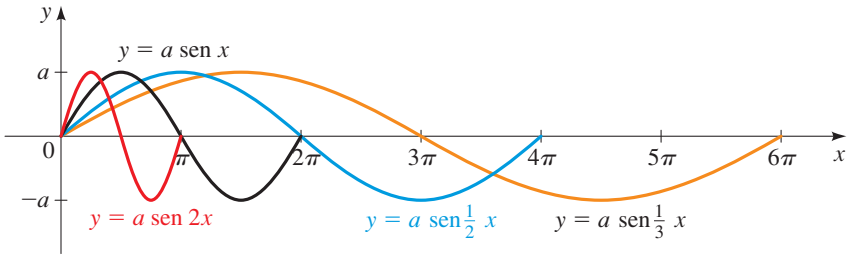


FIGURA 9

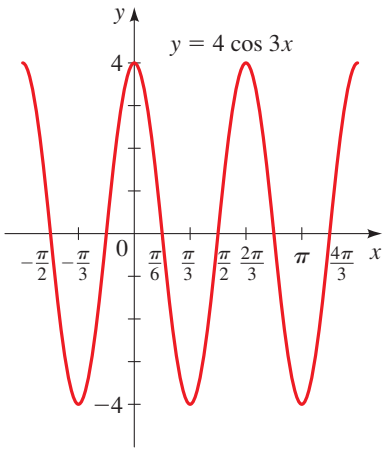


FIGURA 10

EJEMPLO 3 | Amplitud y período

Encuentre la amplitud y período de cada función y trace su gráfica.

(a) $y = 4 \cos 3x$ **(b)** $y = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

SOLUCIÓN

(a) Obtenemos la amplitud y período a partir de la forma de la función como sigue:

$$\text{amplitud} = |a| = 4$$

$$y = 4 \cos 3x$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$$

La amplitud es 4 y el período es $2\pi/3$. La gráfica se ilustra en la Figura 10.

(b) Para $y = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$,

$$\text{amplitud} = |a| = |-2| = 2$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$

La gráfica está en la Figura 11.

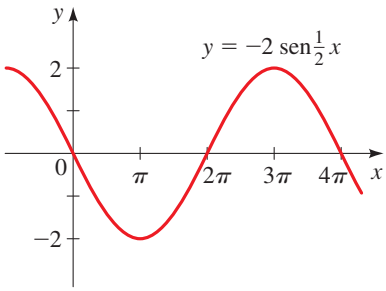


FIGURA 11

AHORA INTENTE HACER LOS EJERCICIOS **19** Y **21**

Las gráficas de funciones de la forma $y = a \operatorname{sen} k(x - b)$ y $y = a \cos k(x - b)$ son simplemente curvas seno y coseno desplazadas horizontalmente en una cantidad $|b|$. Se desplazan a la derecha si $b > 0$ o a la izquierda si $b < 0$. El número b es el *desfase*. Resumimos las propiedades de estas funciones en el recuadro siguiente.

CURVAS SENO Y COSENO DESPLAZADAS

Las curvas sinusoidales y cosenoidales

$$y = a \operatorname{sen} k(x - b) \qquad \text{y} \qquad y = a \cos k(x - b) \qquad (k > 0)$$

tienen **amplitud** $|a|$, **período** $2\pi/k$, y **desfase** b.

Un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo es $[b, b + (2\pi/k)]$.

Las gráficas de $y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ y $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ se muestran en la Figura 12.

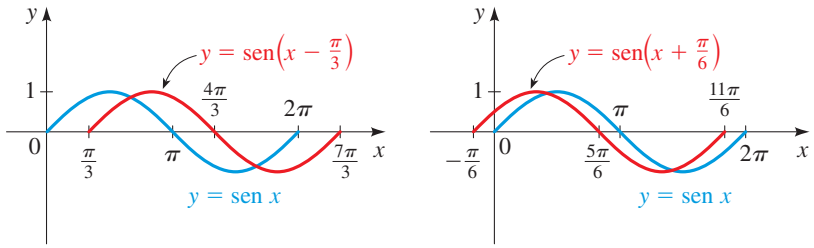


FIGURA 12

EJEMPLO 4 | Una curva seno desplazada

Encuentre la amplitud, período y desfase de $y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, y grafique un período completo.

SOLUCIÓN Obtenemos la amplitud, período y desfase de la forma de la función como sigue:

$$\text{amplitud} = |a| = 3, \quad \text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$y = 3 \operatorname{sen} 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{desfase} = \frac{\pi}{4} \text{ (a la derecha)}$$

Como el desfase es $\pi/4$ y el período es π, un período completo ocurre sobre el intervalo

$$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} + \pi\right] = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$$

Como ayuda para trazar la gráfica, dividimos este intervalo en cuatro partes iguales y a continuación graficamos una curva seno con amplitud 3, como en la Figura 13.

Veamos ahora otra forma de hallar un intervalo apropiado sobre el cual graficar un período completo. Como el período de $y = \operatorname{sen} x$ es 2π, la función $y = 3 \operatorname{sen} 2(x - \frac{\pi}{4})$ pasará por un período completo a medida que $2(x - \frac{\pi}{4})$ varíe de 0 a 2π.

Inicio de período	Fin de período:
$2(x - \frac{\pi}{4}) = 0$	$2(x - \frac{\pi}{4}) = 2\pi$
$x - \frac{\pi}{4} = 0$	$x - \frac{\pi}{4} = \pi$
$x = \frac{\pi}{4}$	$x = \frac{5\pi}{4}$

Entonces, graficamos un período sobre el intervalo $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$.

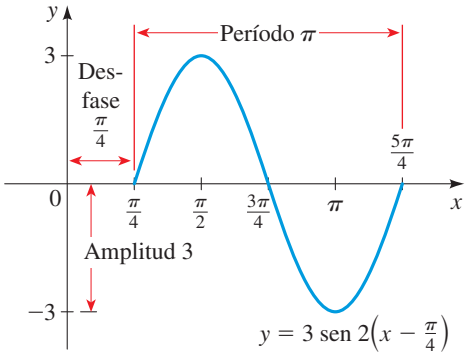


FIGURA 13

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **33**

EJEMPLO 5 | Curva coseno desplazada

Encuentre la amplitud, período y desfase de

$$y = \frac{3}{4} \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

y grafique un período completo.

SOLUCIÓN Primero escribimos esta función en la forma $y = a \cos k(x - b)$. Para hacer esto, factorizamos 2 de la expresión $2x + \frac{2\pi}{3}$ para obtener

$$y = \frac{3}{4}\cos 2\left[x - \left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Por lo tanto, tenemos

$$\text{amplitud} = |a| = \frac{3}{4}$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{desfase} = b = -\frac{\pi}{3}$$ Desfase $\frac{\pi}{3}$ a la *izquierda*

Podemos encontrar un período completo, como sigue:

Inicio del período: $2x + \frac{2\pi}{3} = 0$, $2x = -\frac{2\pi}{3}$, $x = -\frac{\pi}{3}$

Fin del período: $2x + \frac{2\pi}{3} = 2\pi$, $2x = \frac{4\pi}{3}$, $x = \frac{2\pi}{3}$

De este modo podemos graficar un período sobre el intervalo $[-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

A partir de esta información tenemos que un período de esta curva coseno comienza y termina en $-\pi/3$. Para trazar la gráfica sobre el intervalo, éste lo dividimos en cuatro partes iguales y graficamos la curva coseno con amplitud como se muestra en la Figura 14.

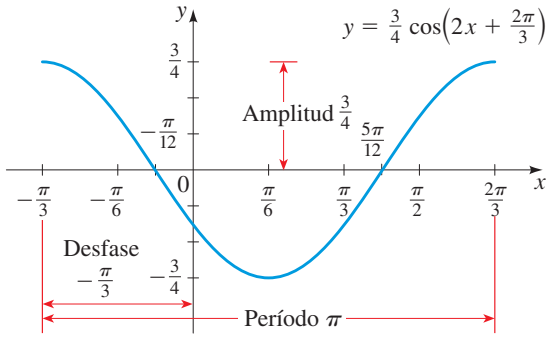


FIGURA 14

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **35**

Uso de calculadoras graficadoras para graficar funciones trigonométricas

Cuando use una calculadora graficadora o computadora para graficar una función, es importante escoger cuidadosamente el rectángulo de vista para producir una gráfica razonable de la función. Esto es en especial verdadero para funciones trigonométricas; el siguiente ejemplo muestra que, si no se tiene cuidado, es fácil producir una gráfica engañosa de una función trigonométrica.

Vea en la Sección 1.9 las guías sobre cómo seleccionar un rectángulo de vista apropiado.

EJEMPLO 6 | Selección de un rectángulo de vista

Grafique la función $f(x) = \text{sen } 50x$ en un rectángulo de vista apropiado.

SOLUCIÓN La Figura 15(a) muestra la gráfica de f producida por una calculadora graficadora usando el rectángulo de vista $[-12, 12]$ por $[-1.5, 1.5]$. A primera vista la gráfica parece ser razonable, pero si cambiamos el rectángulo de vista a los que aparecen en la Figura 15, las gráficas se verán muy diferentes. Algo extraño está pasando.

El aspecto de las gráficas de la Figura 15 depende de la máquina que se use. Las gráficas que el lector obtenga con su calculadora graficadora podrían no parecerse a estas figuras, pero también serán bastante imprecisas.

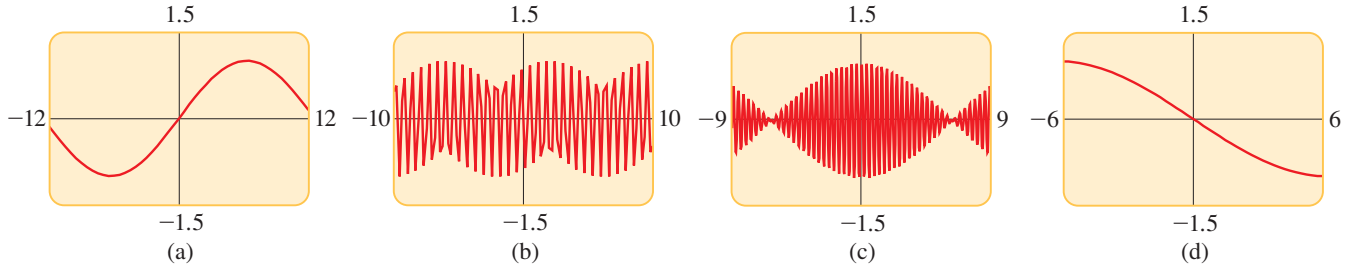


FIGURA 15 Gráficas de $f(x) = \text{sen } 50x$ en diferentes rectángulos de vista.

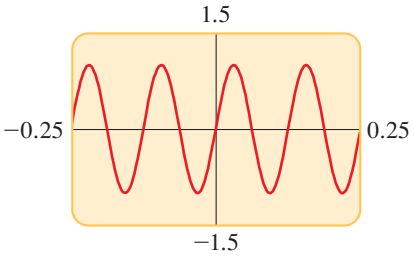


FIGURA 16 $f(x) = \operatorname{sen} 50x$

Para explicar las grandes diferencias en el aspecto de estas gráficas y hallar un rectángulo de vista apropiado, necesitamos hallar el período de la función $y = \operatorname{sen} 50x$:

$$\text{período} = \frac{2\pi}{50} = \frac{\pi}{25} \approx 0.126$$

Esto sugiere que debemos trabajar con pequeños valores de x para mostrar sólo unas pocas oscilaciones de la gráfica. Si escogemos el rectángulo de vista $[-0.25, 0.25]$ por $[-1.5, 1.5]$, obtenemos la gráfica que se ilustra en la Figura 16.

Ahora vemos lo que estaba mal en la Figura 15. Las oscilaciones de $y = \operatorname{sen} 50x$ son tan rápidas que cuando la calculadora localiza puntos y los enlaza, se pierden la mayor parte de los puntos máximo y mínimo y, por tanto, da una impresión engañosa de la gráfica.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **51**

La función h del Ejemplo 7 es **periódica** con período 2π. En general, las funciones que son sumas de funciones de la siguiente lista son periódicas:

1, cos kx, cos $2kx$, cos $3kx$, . . .

sen kx, sen $2kx$, sen $3kx$, . . .

Aun cuando estas funciones parecen ser especiales (notables), son en realidad fundamentales para describir todas las funciones periódicas que surgen en la práctica. El matemático francés J. B. J. Fourier (vea página 501) descubrió que casi toda función periódica se puede escribir como una suma (por lo general una suma infinita) de estas funciones. Esto es notable porque significa que cualquier situación, en la que se presente una variación periódica, se puede describir matemáticamente usando las funciones seno y coseno. Una aplicación moderna del descubrimiento de Fourier es la codificación digital del sonido en discos compactos.

EJEMPLO 7 | Una suma de curvas seno y coseno

Grafique $f(x) = 2\cos x$, $g(x) = \operatorname{sen} 2x$, y $h(x) = 2\cos x + \operatorname{sen} 2x$ en una pantalla común para ilustrar el método de adición gráfica.

SOLUCIÓN Observe que $h = f + g$, de modo que su gráfica se obtiene sumando las coordenadas y correspondientes de las gráficas de f y g. Las gráficas de f, g y h se muestran en la Figura 17.

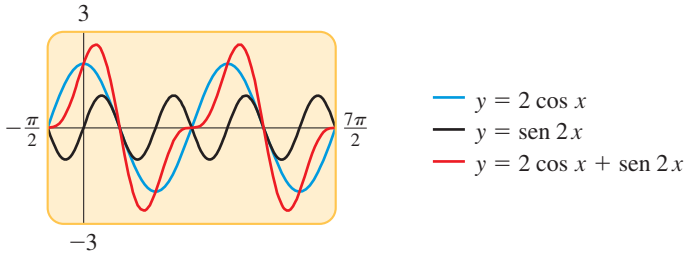


FIGURA 17

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59**

EJEMPLO 8 | Una curva coseno con amplitud variable

Grafique las funciones $y = x^2$, $y = -x^2$ y $y = x^2 \cos 6\pi x$ en una pantalla común. Comente y explique sobre la relación entre las gráficas.

SOLUCIÓN La Figura 18 muestra las tres gráficas en el rectángulo de vista $[-1.5, 1.5]$ por $[-2, 2]$. Parece que la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi$ se encuentra entre las gráficas de las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$.

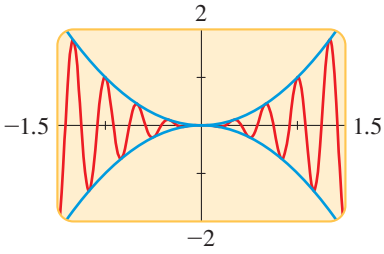


FIGURA 18 $y = x^2 \cos 6\pi x$

Para entender esto, recuerde que los valores de cos $6x$ están entre -1 y 1, es decir,

$$-1 \le \cos 6\pi x \le 1$$

para todos los valores de x. Multiplicando las desigualdades por x^2 y observando que $x^2 \ge 0$, obtenemos

$$-x^2 \le x^2 \cos 6\pi x \le x^2$$

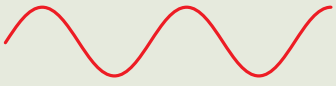
Esto explica por qué las funciones $y = x^2$ y $y = -x^2$ forman una frontera para la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$. (Observe que las gráficas se tocan cuando $6\pi x = \pm 1$.)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **63**

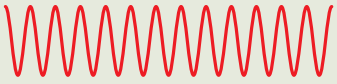
El Ejemplo 8 muestra que la función $y = x^2$ controla la amplitud de la gráfica de $y = x^2 \cos 6\pi x$. En general, si $f(x) = a(x) \cos kx$, la función a determina cómo varía la amplitud de f, y la gráfica de f está entre las gráficas de $y = -a(x)$ y $y = a(x)$. A continuación veamos otro ejemplo.

Radio AM y FM

Las transmisiones de radio están formadas por ondas de sonido sobrepuestas en una forma de onda electromagnética llamada **señal portadora**.

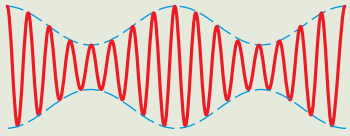


Onda de sonido



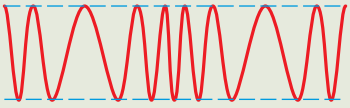
Señal portadora

Hay dos tipos de transmisión de radio, llamadas **amplitud modulada (AM)** y **frecuencia modulada (FM)**. En emisoras de AM, la onda de sonido cambia, o **modula**, la amplitud de la portadora, pero la frecuencia permanece sin cambio.



Señal de AM.

En emisoras de FM, la onda de sonido modula la frecuencia, pero la amplitud permanece igual.



Señal de FM.

EJEMPLO 9 | Curva coseno con amplitud variable

Grafique la función $f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$.

SOLUCIÓN La gráfica aparece en la Figura 19. Aun cuando está trazada por una computadora, podríamos haberla hecho manualmente trazando primero las curvas de frontera $y = \cos 2\pi x$ y $y = -\cos 2\pi x$. La gráfica de f es una curva coseno que está entre las gráficas de estas dos funciones.

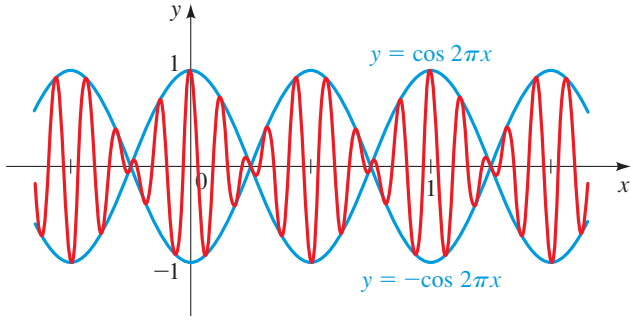


FIGURA 19 $f(x) = \cos 2\pi x \cos 16\pi x$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65**

EJEMPLO 10 | Una curva seno con amplitud amortiguada

La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ es importante en cálculo. Grafique esta función y comente sobre su comportamiento cuando x es cercana a 0.

SOLUCIÓN El rectángulo de vista $[-15, 15]$ por $[-0.5, 1.5]$ que se ilustra en la Figura 20(a) da una buena vista general de la gráfica de f. El rectángulo de vista $[-1, 1]$ por $[-0.5, 1.5]$ de la Figura 20(b) se enfoca en el comportamiento de f cuando $x \approx 0$. Observe que aun cuando $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$ (en otras palabras, 0 no está en el dominio de f), los valores de f parecen aproximarse a 1 cuando x se acerca a 0. Este dato es crucial en cálculo.

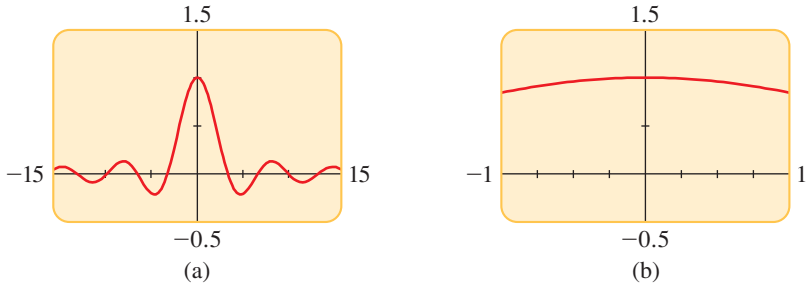


FIGURA 20 $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **75**

La función del Ejemplo 10 se puede escribir como

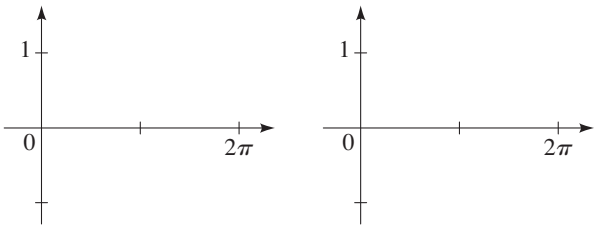
$$f(x) = \frac{1}{x} \operatorname{sen} x$$

y puede entonces verse como una función seno cuya amplitud está controlada por la función $a(x) = 1/x$.

5.3 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Las funciones trigonométricas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$ tienen amplitud ____ y período ____. Trace una gráfica de cada función en el intervalo $|2\pi|$.



2. La función trigonométrica $y = 3 \operatorname{sen} 2x$ tiene amplitud _____ y período _____.

HABILIDADES

3-16 ■ Grafique la función.

3. $f(x) = 1 + \cos x$
4. $f(x) = 3 + \operatorname{sen} x$
5. $f(x) = -\operatorname{sen} x$
6. $f(x) = 2 - \cos x$
7. $f(x) = -2 + \operatorname{sen} x$
8. $f(x) = -1 + \cos x$
9. $g(x) = 3 \cos x$
10. $g(x) = 2 \operatorname{sen} x$
11. $g(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$
12. $g(x) = -\frac{2}{3} \cos x$
13. $g(x) = 3 + 3 \cos x$
14. $g(x) = 4 - 2 \operatorname{sen} x$
15. $h(x) = |\cos x|$
16. $h(x) = |\operatorname{sen} x|$

17-28 ■ Encuentre la amplitud y período de la función, y trace su gráfica.

17. $y = \cos 2x$
18. $y = -\operatorname{sen} 2x$
19. $y = -3 \operatorname{sen} 3x$
20. $y = \frac{1}{2} \cos 4x$
21. $y = 10 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$
22. $y = 5 \cos \frac{1}{4}x$
23. $y = -\frac{1}{3} \cos \frac{1}{3}x$
24. $y = 4 \operatorname{sen}(-2x)$
25. $y = -2 \operatorname{sen} 2\pi x$
26. $y = -3 \operatorname{sen} \pi x$
27. $y = 1 + \frac{1}{2} \cos \pi x$
28. $y = -2 + \cos 4\pi x$

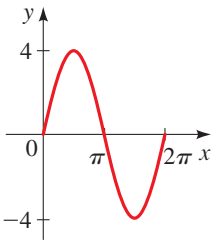
29-42 ■ Encuentre la amplitud, período y desfase de la función, y grafique un período completo.

29. $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
30. $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
31. $y = -2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$
32. $y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
33. $y = -4 \operatorname{sen} 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
34. $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
35. $y = 5 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$
36. $y = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$
37. $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$
38. $y = 1 + \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$
39. $y = 3 \cos \pi(x + \frac{1}{2})$
40. $y = 3 + 2 \operatorname{sen} 3(x + 1)$
41. $y = \operatorname{sen}(\pi + 3x)$
42. $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

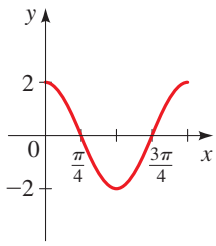
43-50 ■ Nos dan la gráfica de un período completo de una curva seno o coseno.
(a) Encuentre la amplitud, período y desfase.
(b) Escriba una ecuación que represente la curva en la forma

$$y = a \operatorname{sen} k(x - b) \quad \text{o} \quad y = a \cos k(x - b)$$

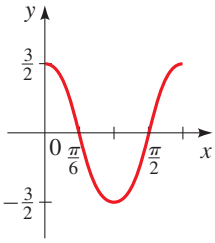
43.



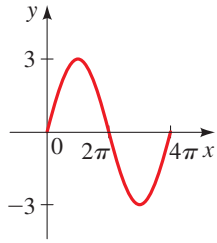
44.



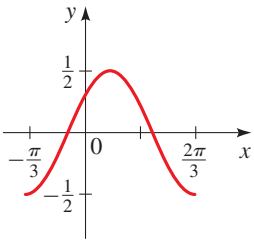
45.



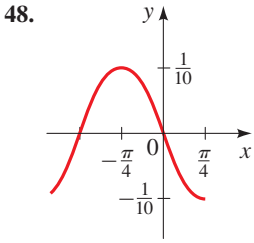
46.



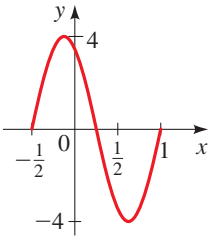
47.



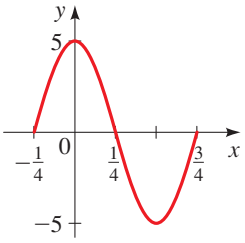
48.



49.



50.



51-58 ■ Determine un rectángulo de vista apropiado para cada función, y úselo para trazar la gráfica.

51. $f(x) = \cos 100x$
52. $f(x) = 3 \operatorname{sen} 120x$
53. $f(x) = \operatorname{sen}(x/40)$
54. $f(x) = \cos(x/80)$
55. $y = \tan 25x$
56. $y = \csc 40x$
57. $y = \operatorname{sen}^2 20x$
58. $y = \sqrt{\tan 10\pi x}$

59-60 ■ Grafique f, g y $f + g$ en una pantalla común para ilustrar la adición gráfica.

59. $f(x) = x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x$

60. $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad g(x) = \operatorname{sen} 2x$

61-66 ■ Grafique las tres funciones en una pantalla común. ¿Cómo están relacionadas las gráficas?

61. $y = x^2, \quad y = -x^2, \quad y = x^2 \operatorname{sen} x$

62. $y = x, \quad y = -x, \quad y = x \cos x$

63. $y = \sqrt{x}, \quad y = -\sqrt{x}, \quad y = \sqrt{x} \operatorname{sen} 5\pi x$

64. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = -\dfrac{1}{1 + x^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2\pi x}{1 + x^2}$

65. $y = \cos 3\pi x, \quad y = -\cos 3\pi x, \quad y = \cos 3\pi x \cos 21\pi x$

66. $y = \operatorname{sen} 2\pi x, \quad y = -\operatorname{sen} 2\pi x, \quad y = \operatorname{sen} 2\pi x \operatorname{sen} 10\pi x$

67-70 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo de la función.

67. $y = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x$

68. $y = x - 2 \operatorname{sen} x, \ 0 \le x \le 2\pi$

69. $y = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$

70. $y = \dfrac{\cos x}{2 + \operatorname{sen} x}$

71-74 ■ Encuentre todas las soluciones de la ecuación que estén sobre el intervalo $[0, \pi]$. Exprese cada respuesta redondeada a dos lugares decimales.

71. $\cos x = 0.4$

72. $\tan x = 2$

73. $\csc x = 3$

74. $\cos x = x$

75-76 ■ Nos dan una función f.

(a) ¿f es par, impar o ninguna de éstas?

(b) Encuentre los puntos de intersección x de la gráfica de f.

(c) Grafique f en un rectángulo de vista apropiado.

(d) Describa el comportamiento de la función a medida que $x \to \pm\infty$.

(e) Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. ¿Qué ocurre cuando x se aproxima a 0?

75. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$

76. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} 4x}{2x}$

APLICACIONES

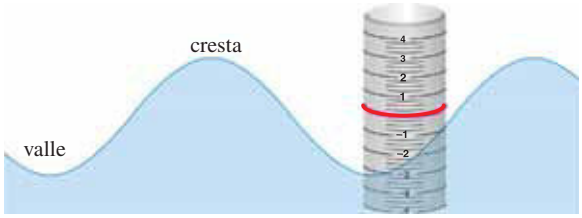
77. Altura de una ola Cuando pasa una ola por un rompeolas de pilotes, la altura del agua está modelada por la función

$$h(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{10} t\right)$$

donde $h(t)$ es la altura en pies sobre el nivel medio del mar en el tiempo t segundos.

(a) Encuentre el período de la ola.

(b) Encuentre la altura de la ola, es decir, la distancia vertical entre el valle y la cresta de la ola.



78. Vibraciones de sonido Se pulsa un diapasón, produciendo un tono puro cuando vibran sus puntas. Las vibraciones son modeladas por la función

$$v(t) = 0.7 \operatorname{sen}(880\pi t)$$

donde $v(t)$ es el desplazamiento de las puntas en milímetros en el tiempo t segundos.

(a) Encuentre el período de la vibración.

(b) Encuentre la frecuencia de la vibración, es decir, el número de veces que la punta vibra por segundo.

(c) Grafique la función v.

79. Presión sanguínea Cada vez que pulsa nuestro corazón, la presión sanguínea primero aumenta y después disminuye a medida que el corazón descansa entre una pulsación y otra. Las presiones sanguíneas máxima y mínima reciben el nombre de presiones *sistólica* y *diastólica*, respectivamente. Las *lecturas de presión sanguínea* se escriben como sistólica/diastólica. Una lectura de 120/80 se considera normal.

La presión sanguínea de cierta persona está modelada por la función

$$p(t) = 115 + 25 \operatorname{sen}(160\pi t)$$

donde $p(t)$ es la presión en mmHg (milímetros de mercurio), en el tiempo t medida en minutos.

(a) Encuentre el período de p.

(b) Encuentre el número de pulsaciones por minuto.

(c) Grafique la función p.

(d) Encuentre la lectura de presión sanguínea. ¿Cómo se compara esto contra la presión sanguínea normal?

80. Estrellas variables Las estrellas variables son aquellas cuyo brillo varía periódicamente. Una de las más visibles es R Leonis; su brillo está modelada por la función

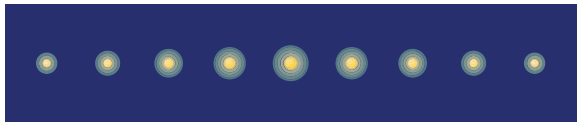
$$b(t) = 7.9 - 2.1 \cos\left(\frac{\pi}{156} t\right)$$

donde t se mide en días.

(a) Encuentre el período de R Leonis.

(b) Encuentre el brillo máximo y mínimo.

(c) Grafique la función b.



DESCUBRIMIENTO ▪ DISCUSIÓN ▪ REDACCIÓN

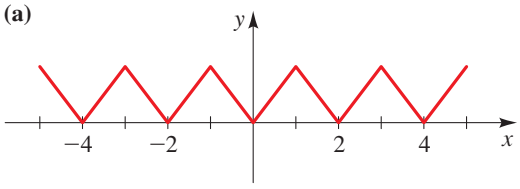
81. Composiciones que contienen funciones trigonométricas Este ejercicio explora el efecto de la función interior g en una función compuesta $y = f(g(x))$.

(a) Grafique la función $y = \operatorname{sen}\sqrt{x}$ usando el rectángulo de vista $[0, 400]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿En qué formas difiere esta gráfica de la gráfica de la función seno?

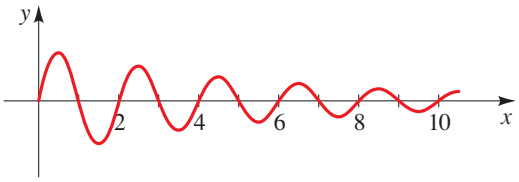
(b) Grafique la función $y = \operatorname{sen}(x^2)$ usando el rectángulo de vista $[-5, 5]$ por $[-1.5, 1.5]$. ¿En qué formas difiere esta gráfica de la gráfica de la función seno?

82. Funciones periódicas I Recuerde que una función f es *periódica* si hay un número positivo p tal que $f(t + p) = f(t)$ para toda t, y la más pequeña p (si existe) es el *período* de f. La gráfica de una función de período p se ve igual en cada intervalo de longitud p, de modo que podemos fácilmente determinar el período a partir de la gráfica. Determine si la función cuya gráfica se muestra es periódica; si es periódica, encuentre el período.

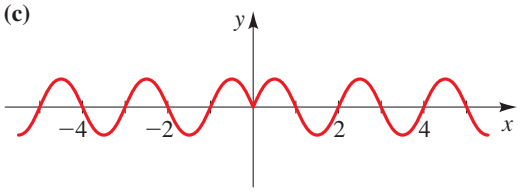
(a)



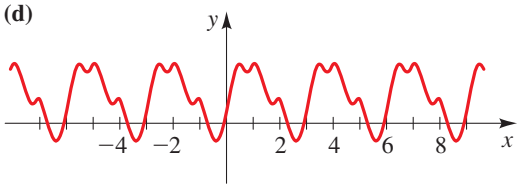
(b)



(c)



(d)



83. Funciones periódicas II Use calculadora graficadora para graficar las siguientes funciones. De la gráfica, determine si la función es periódica; si es periódica, encuentre el período. (Vea página 156 para la definición de $[\![x]\!]$.)

(a) $y = |\operatorname{sen} x|$

(b) $y = \operatorname{sen}|x|$

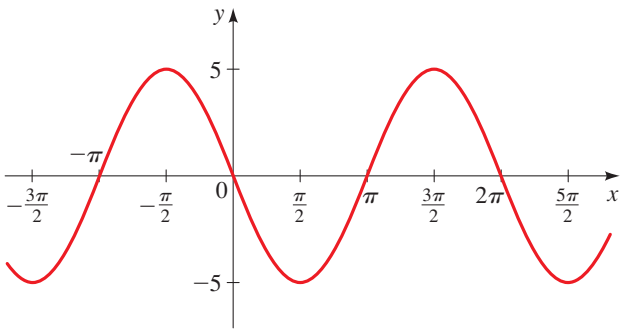
(c) $y = 2^{\cos x}$

(d) $y = x - [\![x]\!]$

(e) $y = \cos(\operatorname{sen} x)$

(f) $y = \cos(x^2)$

84. Curvas sinusoidales La gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$ desplazada a la derecha $\pi/2$ unidades. Entonces, la curva seno $y = \operatorname{sen} x$ es también al mismo tiempo una curva coseno: $y = \cos(x - \pi/2)$. De hecho, cualquier curva seno es también una curva coseno con un desfase diferente, y cualquier curva coseno también es una curva seno. Las curvas seno y coseno se conocen en forma colectiva como *sinusoidales*. Para la curva cuya gráfica se muestra, encuentre todas las formas posibles de expresarla como curva seno $y = a\operatorname{sen}(x - b)$ o como curva coseno $y = a\cos(x - b)$. Explique por qué piensa usted que ha encontrado todas las opciones posibles para a y b en cada caso.



PROYECTO DE DESCUBRIMIENTO **Modelos depredador/presa**

En este proyecto exploramos el uso de funciones sinusoidales al modelar la población de un depredador y su presa. Se puede hallar el proyecto en el sitio web acompañante de este libro: **www.stewartmath.com**